Hoang Le-Huy

CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Les Presses de l'Université Laval

Les Presses de l'Université Laval reçoivent chaque année du Conseil des Arts du Canada et de la Société d'aide au développement des entreprises culturelles du Québec une aide financière pour l'ensemble de leur programme de publication.

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise de son Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition (PADIÉ) pour nos activités d'édition.

ISBN 2-7637-8078-4

Distribution de livres Univers
845, rue Marie-Victorin
Saint-Nicolas (Québec)
Canada G7A 3S8
Tél. (418) 831-7474 ou 1 800 859-7474
Téléc. (418) 831-4021
http://www.ulaval.ca/pul

Table des matières

Avant-propos

Un circuit électrique, sous forme de schéma, est l'ensemble des éléments idéals connectés de façon à constituer le modèle mathématique d'un système électrique. Ce modèle présente la structure ainsi que les caractéristiques essentielles du système physique. L'étude d'un circuit permet de comprendre le fonctionnement du système électrique qu'il représente.

La théorie des circuits comprend essentiellement des lois et des théorèmes qui régissent les relations entre les variables d'un circuit et aussi des méthodes permettant l'analyse et la synthèse des circuits.

Cet ouvrage a été écrit pour utiliser comme manuel dans un premier cours de circuits électriques au niveau universitaire. Il présente les concepts de base et les lois fondamentales des circuits électriques ainsi que les principales méthodes d'analyse en régime transitoire et permanent des circuits linéaires. Les notions de mathématiques pré-requises sont celles présentées normalement dans les cours de mathématiques de première année universitaire.

La matière est présentée de façon concise et directe afin de se concentrer sur l'essentiel de la théorie de circuits. Les notions théoriques sont expliquées et illustrées par des exemples de circuits concrets.

Le premier chapitre introduit les notions fondamentales de l'électricité et présente les éléments de base utilisés dans la modélisation des systèmes électriques.

Les chapitres 2 et 3 présentent les lois et théorèmes de circuits et les différentes méthodes pour établir les équations d'équilibre des circuits. Les méthodes classiques (des mailles et des noeuds) sont détaillées et appliquées à des diverses topologies de circuits passifs et actifs.

Chapitre 4 présente les fonctions mathématiques utilisées pour modéliser les sources d'excitation des circuits électriques. Les fonctions singulières (échelon, impulsion, rampe) et leurs combinaisons permettent de modéliser la plupart des excitations apériodiques. Les fonctions exponentielles complexes sont utilisées pour représenter les excitations périodiques et en particulier les fonctions sinusoïdales.

Dans le chapitre 5, l'analyse transitoire des circuits électriques est étudiée et appliquée à des circuits du premier et du deuxième ordre. La méthode d'analyse basée sur les équations différentielles est expliquée en détails permettant de l'utiliser dans diverses situations. On étudie également le régime continu permanent et l'analyse des circuits initialement excités.

Chapitre 6 présente la transformation de Laplace et son application dans l'analyse transitoire des circuit électriques. Les notions d'impédance et d'admittance sont introduites pour faciliter l'établissement des équations d'équilibre du circuit et aussi pour pouvoir appliquer les méthodes déjà développées dans le domaine du temps. La méthode par la transformation de Laplace est systématique permettant d'analyser des circuits d'ordre plus élevé et plus complexes. Les fonctions de transfert sont introduites

pour l'analyse des quadripôles.

Chapitre 7 traite de l'analyse des circuits en régime sinusoïdal permanent utilisant des phaseurs et des impédances. Les fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent sont introduites. La réponse en fréquence des circuits est étudiée et appliquée à des circuits passifs et actifs. Le calcul de la puissance en régime sinusoïdal permanent est également examiné.

Des exercices typiques à la fin de chaque chapitre permettent d'illustrer l'application de la théorie aux problèmes réels d'analyse de circuits. Des réponses aux exercices sont aussi données comme aide à la pratique.

Université Laval
Québec, Canada
Janvier 2004

Hoang Le-Huy

Chapitre 1

ÉLÉMENTS DE BASE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Dans ce chapitre, les phénomènes électriques fondamentaux sont décrits pour introduire les éléments idéaux servant à la modélisation des systèmes électriques. L'approche générale d'analyse des systèmes électriques et les notions de base des circuits électriques sont présentées.

1.1 Phénomènes électriques fondamentaux

Nous allons examiner les notions de base de l'électricité telles que charge électrique, courant électrique, tension électrique, énergie électrique et puissance électrique. Ensuite, les trois phénomènes fondamentaux qui se trouvent dans tous les systèmes électriques seront décrits: la résistance, le condensateur et l'inductance.

1.1.1 Charge électrique et courant électrique

La notion de *charge électrique* est basée sur la théorie atomique suivant laquelle l'atome est représenté comme un noyau portant une charge positive entouré d'électrons portant des charges négatives. Dans un atome neutre, la charge totale du noyau est égale (en valeur absolue) à la charge totale des électrons. Un atome devient positif lorsque certains électrons manquent. Un atome devient négatif lorsqu'il y a un surplus d'électrons.

La charge électrique élémentaire est la charge portée par un électron. L'unité de charge électrique est Coulomb (C). L'électron porte une charge de 1.6021×10^{-19} C.

Un *courant électrique* est créé par le déplacement des électrons dans un milieu donné. L'intensité d'un courant électrique est défini comme le taux de déplacement de la charge électrique q à travers une section du milieu:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1\text{-}1)$$

On utilise habituellement le terme «courant» pour désigner *l'intensité* d'un courant électrique. L'unité de courant est Ampère (A).

Dans les solides, il existe un certain nombre d'*électrons libres* qui sont «détachés» de leurs atomes et qui peuvent se déplacer dans le matériau sous l'influence d'un champ électrique. Les *conducteurs électriques* sont des matériaux qui ont beaucoup d'électrons libres qui permettent la circulation des courants électriques importants. Les *isolants électriques* sont des matériaux qui ont très peu d'électrons libres. Ils empêchent la cir-

culation des courants électriques. Il y a aussi des *semi-conducteurs* qui possèdent une conductivité située entre celles des conducteurs et des isolants. Le silicium et le germanium sont deux semi-conducteurs courants utilisés dans la fabrication des transistors et des circuits intégrés.

On utilise habituellement le symbole «i» pour représenter un courant électrique. Le *sens conventionnel* d'un courant électrique est l'opposé du sens de déplacement des électrons, comme illustre la figure 1-1.

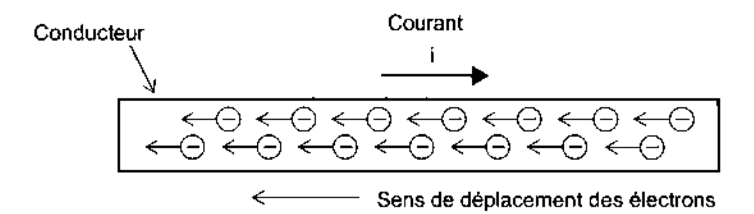


Figure 1-1 Sens conventionnel du courant électrique.

1.1.2 Tension électrique

Le déplacement des électrons est causé par une *différence de potentiel électrique* entre deux points. On utilise le terme «tension électrique» pour désigner la différence de potentiel électrique. L'unité de tension électrique est Volt (V).

On utilise habituellement le symbole «v» pour représenter une tension électrique. Dans un conducteur, les électrons se déplacent du négatif (-) vers le positif (+), ce qui définit la polarité de la tension électrique tel qu'illustré dans la figure 1.2.

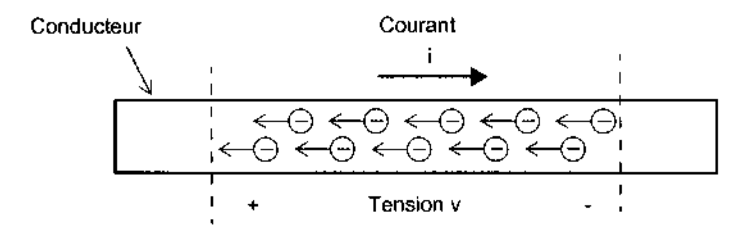


Figure 1-2 Polarité de la tension électrique.

1.1.3 Énergie électrique et puissance électrique

Le déplacement des électrons (d'une charge totale q) nécessite une quantité d'*énergie électrique* w qui est égale au produit de la charge q et la tension v:

$$w = qv \tag{1-2}$$

où w est l'énergie électrique, v est la tension électrique, et q est la charge électrique déplacée. L'unité d'énergie est Joule (J).

Le taux de variation de l'énergie électrique est défini comme la *puissance électrique* p:

$$p = \frac{dw}{dt} = v\frac{dq}{dt} = vi \tag{1-3}$$

La puissance électrique p est donc égale au produit de la tension v et le courant i:

$$p = vi \tag{1-4}$$

L'unité de puissance est Watt (W).

L'énergie électrique est égale à l'intégrale de la puissance:



$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt \tag{1-5}$$

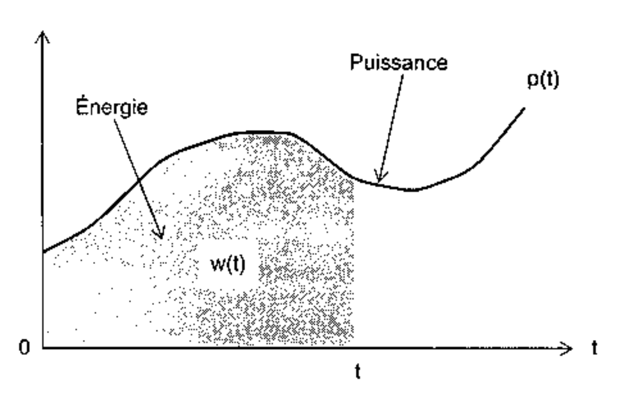


Figure 1-3 Énergie et puissance.

1.1.4 Résistance

Considérons un conducteur cylindrique (de longueur ℓ et section S) dans lequel circule un courant électrique d'intensité i, comme illustre la figure 1-4. On suppose que la densité des électrons qui se déplacent à travers la section S est uniforme. La tension entre les deux bouts du conducteur est égale à v.

La *densité de courant* J est définie comme l'intensité par unité de surface de la section:

$$J = \frac{i}{S} \tag{1-6}$$

L'unité de densité de courant est A/m^2.

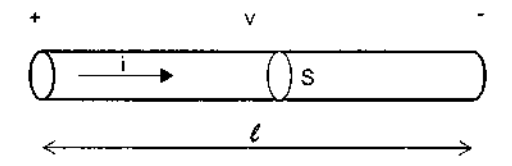


Figure 1-4 Courant électrique dans un conducteur cylindrique.

Le champ électrique $\vec{E}$ dans le conducteur est uniforme et suit la direction du conducteur:

$$E = \frac{v}{\ell} \tag{1-7}$$

La densité de courant est proportionnelle au champ électrique:

$$J = \sigma E \tag{1-8}$$

où σ est la *conductivité* (en $\Omega^{-1}m^{-1}$) du conducteur.

Entre la tension v et le courant i, on peut établir la relation suivante:

$$v = E \times \ell = \frac{J}{\sigma} \times \ell = \frac{i}{\sigma S} \times \ell = \left(\frac{\ell}{\sigma S}\right) \times i \tag{1-9}$$

La quantité $R = \frac{\ell}{\sigma S}$ et définie comme la *résistance* du conducteur. L'unité de résistance est Ohm (Ω).

On peut aussi exprimer la résistance R comme:

$$R = \rho \times \frac{\ell}{S} \tag{1-10}$$

où $\rho = \frac{1}{\sigma}$ est la *résistivité* du conducteur. L'unité de résistivité est Ω.m.

L'équation (1-9) peut être écrite comme:

$$v = Ri \tag{1-11}$$

Cette relation est connue comme *la loi d'Ohm*.

À partir de (1-11), on déduit:

$$i = \frac{v}{R} = \left(\frac{1}{R}\right)v = Gv \tag{1-12}$$

La quantité G est définie comme *la conductance*. L'unité de conductance est Siemens (S).

Le déplacement des électrons à travers un conducteur crée des collisions avec les atomes du conducteur. À chaque collision, une certaine quantité d'énergie est perdue et convertie en chaleur.

On peut calculer la puissance perdue (qui est dissipée sous forme de chaleur) dans une résistance comme:

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R} \tag{1-13}$$

1.1.5 Condensateur

Considérons la structure montrée dans la figure 1-5 qui est constituée de deux plaques conductrices parallèles de surface A et séparées par un isolant d'épaisseur d. Les deux plaques sont chargées à +q et -q. Ce système est appelé un *condensateur* électrique qui emmagasine des charges électriques de signes opposés sur ses deux électrodes.

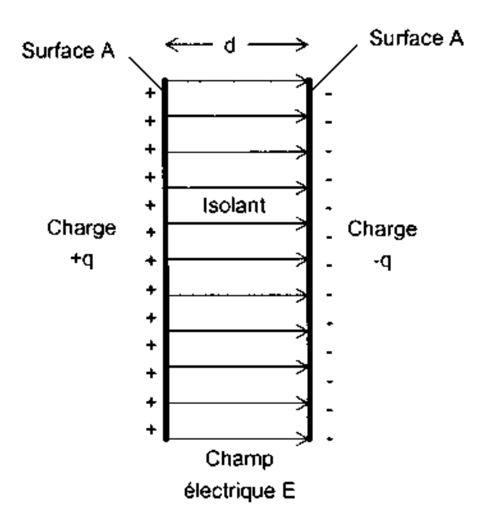


Figure 1-5 Champ électrique entre deux plaques conductrices chargées d'un condensateur.

Un champ électrique $\vec{E}$ est créé dans l'isolant entre les deux plaques conductrices. On suppose que le milieu isolant est isotrope et que les lignes de force sont perpendiculaires à la surface des plaques. Le champ électrique entre les deux plaques peut être calculé par le théorème de Gauss:

$$E = \frac{q}{\varepsilon A} \tag{1-14}$$

où ε est la *permittivité* de l'isolant.

La tension électrique entre les deux plaques est donnée par:

$$v = Ed = \frac{q}{\varepsilon A}d = \frac{q}{\left(\frac{\varepsilon A}{d}\right)} = \frac{q}{C} \tag{1-15}$$

La quantité $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ est définie comme la *capacité* (capacité d'emmagasiner de charge électrique) du condensateur. La capacité est une fonction des dimensions du condensateur et de la permittivité de l'isolant. L'unité de capacité est Farad (F).

À partir de (1-15), on peut écrire:

$$q = Cv \tag{1-16}$$

En dérivant les deux membres de cette équation, on obtient:

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} + v\frac{dC}{dt} \tag{1-17}$$

On peut remarquer que $\frac{dq}{dt}$ est le courant i qui circule à travers le condensateur. Ce courant dépend ainsi du taux de variation de la tension à ses bornes et également du taux de variation de la capacité:

$$i = C\frac{dv}{dt} + v\frac{dC}{dt} \tag{1-18}$$

Si la capacité du condensateur ne varie pas avec le temps, on aura:

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{1-19}$$

À partir de cette relation, on peut calculer la tension aux bornes du condensateur comme:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt \tag{1-20}$$

ou encore:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\,dt + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt \tag{1-21}$$

où $v(t_0)$ est la tension aux bornes du condensateur à l'instant t_0.

On constate que le condensateur emmagasine des charges électriques. Cette accumulation de charges crée un champ électrique entre ses deux plaques. On dit que le condensateur accumule de l'énergie électrique sous forme d'un champ électrique.

L'énergie accumulée dans un condensateur peut être calculée en intégrant la puissance:

$$w = \int_{-\infty}^{t} vi\,dt = \int_{-\infty}^{t} vC\frac{dv}{dt}dt = C\int_{-\infty}^{t} v\,dv = \frac{1}{2}Cv^2\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Cv^2(t) - \frac{1}{2}Cv^2(-\infty) \tag{1-22}$$

Si $v(-\infty) = 0$, on aura:

$$w = \frac{1}{2}Cv^2(t) \tag{1-23}$$

1.1.6 Inductance

Considérons un conducteur droit dans lequel circule un courant i comme illustre la figure 1-6. Le courant i crée un champ magnétique autour du conducteur. Les lignes de force sont des cercles concentriques dont le centre est le conducteur.

L'*intensité du champ magnétique* $\vec{H}$ à un point P qui se trouve à une distance r du conducteur est calculée par la loi d'Ampère:

$$H = \frac{i}{2\pi r} \tag{1-24}$$

L'unité d'intensité de champ magnétique est A/m.

La *densité de flux* magnétique $\vec{B}$ est reliée à l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{1-25}$$

L'unité de $\vec{B}$ est Tesla (T) ou Weber/m² (Wb/m²). La quantité μ est la *perméabilité magnétique* du milieu où le champ magnétique existe. L'unité de μ est Henry/m (H/m). La perméabilité magnétique de l'air est très proche de celle du vide $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m.

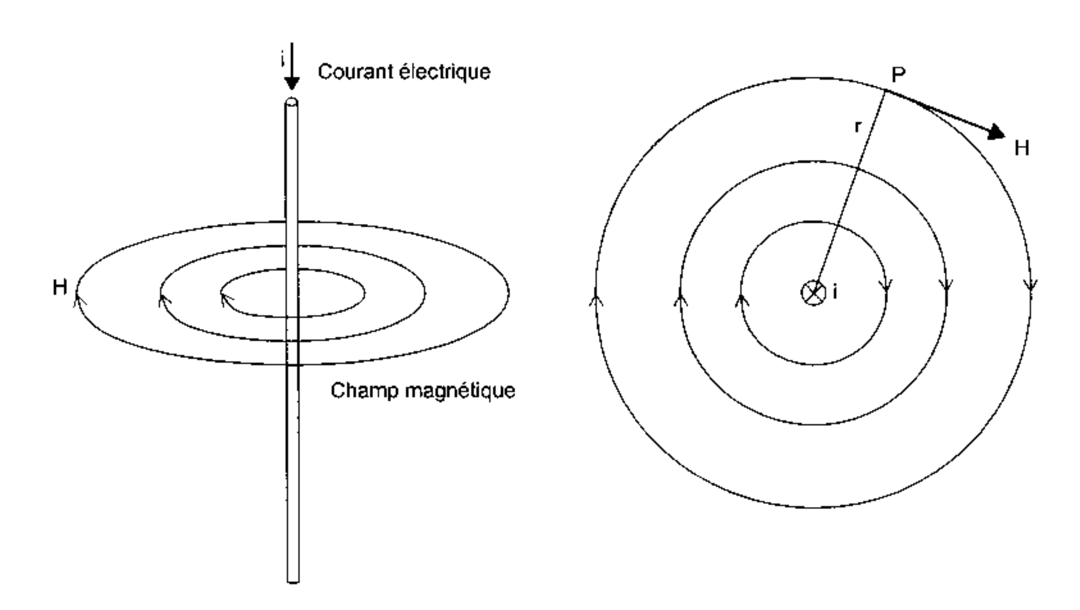


Figure 1-6 Champ magnétique créé par un courant électrique circulant dans un conducteur droit .

Le *flux magnétique* à travers une surface S est l'intégrale de $\vec{B}$ sur cette surface:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (1\text{-}26)$$

L'unité de flux magnétique est Weber (Wb).

Considérons une bobine de N tours de fil conducteur dans lequel circule un courant i. Le champ magnétique créé par la bobine est représenté par des lignes de force montrées dans la figure 1-7. Le flux magnétique créé par le courant i est ϕ. D'après la loi de Faraday, ce flux magnétique induira dans chaque tour de fil une tension égale à $\frac{d\phi}{dt}$. Par conséquent, la tension totale induite dans N tours est égale à:

$$v = N\frac{d\phi}{dt} \qquad (1\text{-}27)$$

On suppose que chaque ligne de flux traverse tous les N tours de la bobine. Donc le flux total traversant la bobine est égal à $N\phi$. Ce flux total est proportionnel au courant i:

$$N\phi = Li \qquad (1\text{-}28)$$

où L est définie comme *l'inductance* de la bobine. L'unité d'inductance est Henry (H).

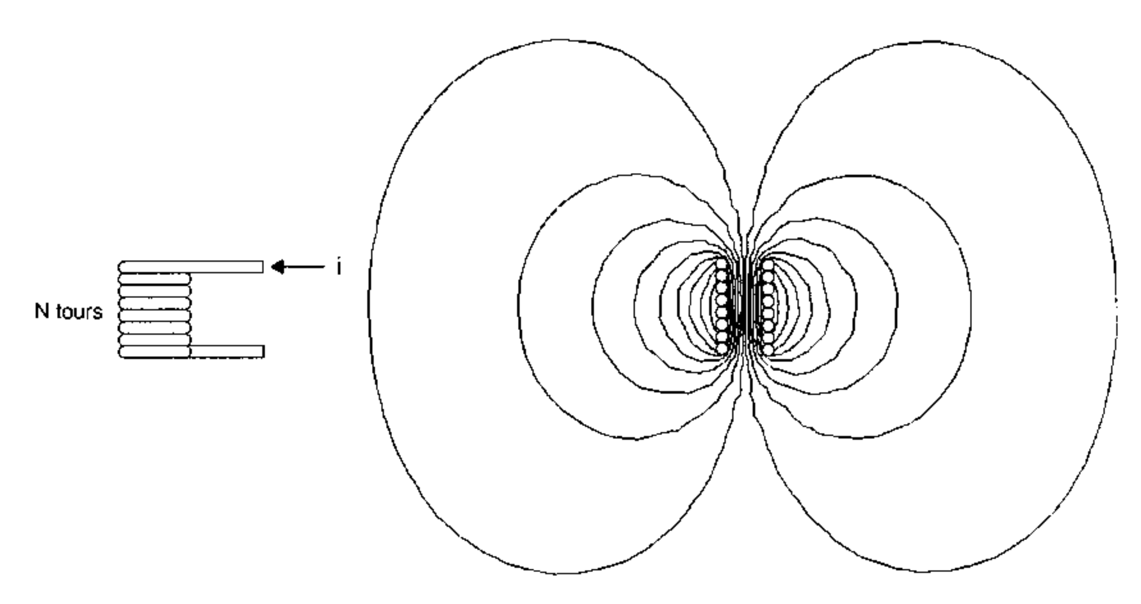


Figure 1-7 Champ magnétique créé par un courant électrique circulant dans une bobine.

À partir de (1-27) et (1-28), on peut écrire:

$$v = \frac{d}{dt}(N\phi) = \frac{d}{dt}(Li) = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt} \quad (1\text{-}29)$$

Si l'inductance L ne varie pas avec le temps, on aura:

$$v = L\frac{di}{dt} \quad (1\text{-}30)$$

À partir de cette relation, on peut calculer le courant dans la bobine comme:

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt \quad (1\text{-}31)$$

ou encore:

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v\,dt + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt \quad (1\text{-}32)$$

où $i(t_0)$ est le courant dans la bobine à l'instant t_0.

On constate que le courant électrique circulant dans une bobine crée un champ magnétique. On dit que la bobine accumule de l'énergie électrique sous forme d'un champ magnétique.

L'énergie accumulée dans une bobine peut être calculée en intégrant la puissance:

$$w = \int_{-\infty}^{t} vi\,dt = \int_{-\infty}^{t} iL\frac{di}{dt}dt = L\int_{-\infty}^{t} i\,di = \frac{1}{2}Li^2\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty) \quad (1\text{-}33)$$

Si $i(-\infty) = 0$, on aura:

$$w = \frac{1}{2}Li^2(t) \quad (1\text{-}34)$$

1.2 Étude des systèmes électriques

Un système électrique est un ensemble de plusieurs composants électriques connectés suivant une configuration donnée pour réaliser une fonction spécifique. Par exemple, un amplificateur audio est composé de transistors, diodes, circuits intégrés, résistances, inductances, condensateurs, transformateurs, etc. La fonction principale d'un tel système est d'augmenter le niveau de puissance du signal d'entrée pour alimenter le haut-parleur.

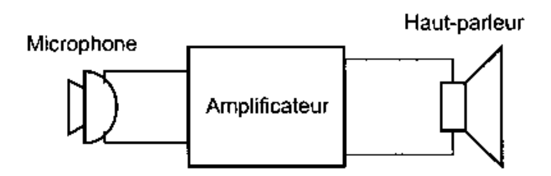


Figure 1-8 Exemple de système électrique.

Chaque composant électrique possède ses caractéristiques et ses fonctions propres. L'interconnexion des composants permet de réaliser la fonction globale désirée du système. Cependant, cette interconnexion impose des contraintes que l'on doit tenir compte lors de l'étude du système.

Les travaux d'étude que l'on peut effectuer sur les systèmes électriques consistent essentiellement en l'analyse et la conception.

L'*analyse* d'un système électrique est l'étude du comportement du système pour différentes conditions de fonctionnement.

La *conception* d'un système électrique est la synthèse d'un système, à partir des composants électriques, pour effectuer une fonction donnée avec les caractéristiques prescrites.

L'analyse et la conception sont deux chemins complémentaires. L'analyse permet de comprendre les caractéristiques d'un système, ce qui permettra la conception d'autres systèmes avec des caractéristiques différentes. Ce processus est illustré dans la figure 1-9.

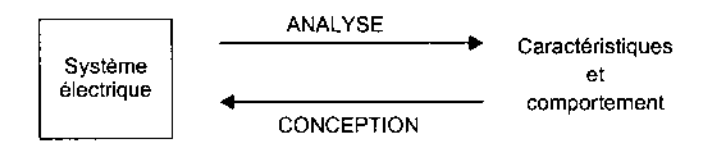


Figure 1-9 Étude des systèmes électriques.

Dans ce texte, on considère seulement le problème de l'analyse des systèmes électriques.

1.3 Modélisation des systèmes électriques

Les phénomènes physiques présents dans un système électrique sont nombreux de telle sorte que l'analyse exacte du système est très difficile, voire impossible. Afin de pouvoir faire une analyse avec des résultats acceptables, on doit établir un modèle mathématique du système basé sur certaines hypothèses d'approximation. C'est la *modélisation* du système.

La précision de l'analyse dépend de la complexité du modèle. Un modèle simple est facile à analyser mais ne donne que des résultats très approximatifs. Par contre, un modèle complexe, qui tient compte de tous les phénomènes présents dans le système, donne des résultats précis mais l'analyse devient plus longue et difficile. En général, on choisit un modèle qui est le compromis entre la précision des résultats et la difficulté de l'analyse.

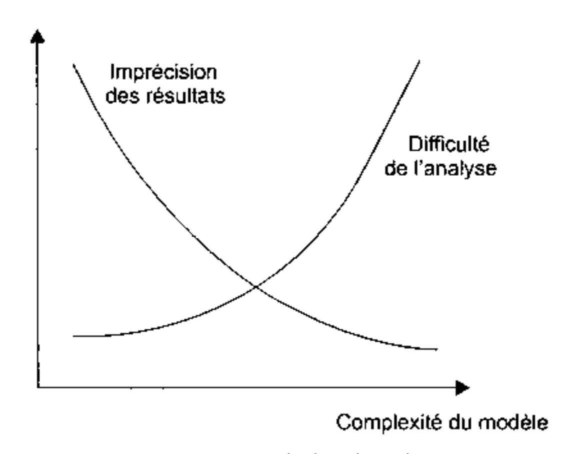


Figure 1-10 Compromis dans la modélisation des systèmes électriques.

La modélisation d'un système électrique consiste à:

- décomposer le système en plusieurs composants simples,
- représenter chaque composant simple par son modèle mathématique (sous forme d'éléments idéaux) qui tient compte des principaux phénomènes physiques,
- connecter les modèles des composants ensemble pour obtenir le modèle du système.

Le modèle du système électrique ainsi obtenu s'appelle un *circuit électrique*.

La figure 1-11 illustre la construction d'un modèle simple du système «amplificateur» de la figure 1-8.

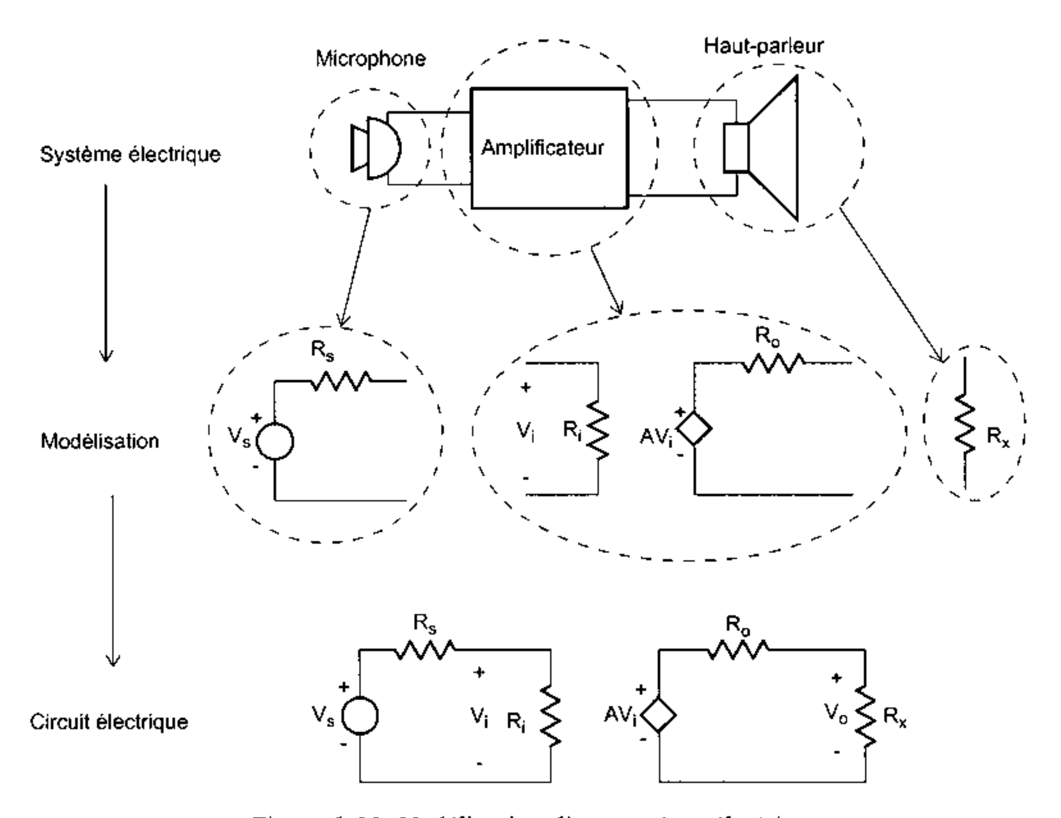


Figure 1-11 Modélisation d'un système électrique.

1.4 Théorie des circuits électriques

L'ensemble des éléments idéaux représentant tous les composants d'un système électrique forme le *modèle du système* que l'on appelle un circuit électrique (ou réseau électrique). Les variables du circuit sont reliées par des *équations d'équilibre* dont la solution représente une approximation du comportement réel du système électrique.

La théorie des circuits électriques comprend:

- des lois et des théorèmes qui régissent les relations entre les variables d'un circuit électrique,
- des méthodes permettant d'établir les équations d'équilibre,
- des méthodes de résolution des équations d'équilibre.

La figure 1-12 illustre la position de la théorie des circuits dans l'étude des systèmes électriques.

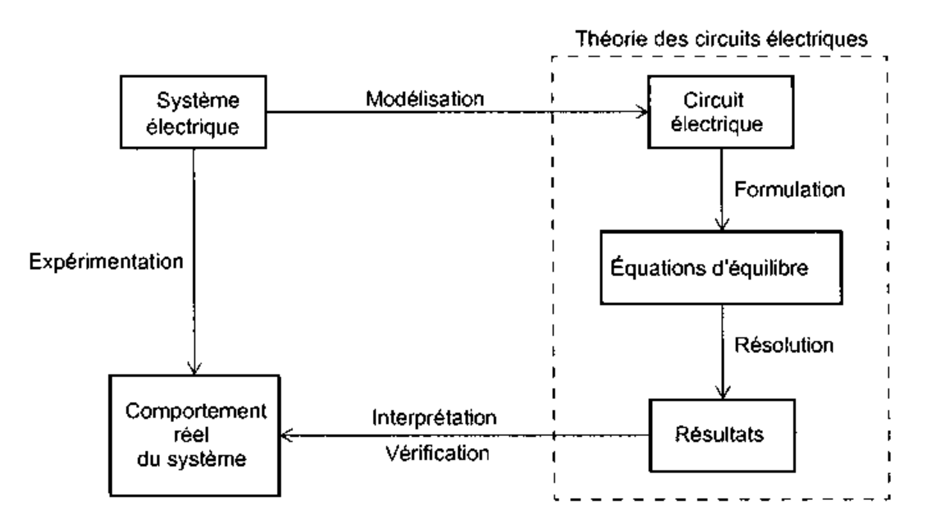


Figure 1-12 Théorie des circuits dans l'étude des systèmes électriques.

1.5 Variables et éléments de circuits électriques

1.5.1 Variables dans les circuits électriques

Les principales variables dans un circuit électrique sont le courant et la tension.

Un *courant électrique* est créé par le déplacement des électrons dans un milieu donné. L'intensité d'un courant électrique est défini comme le taux d'écoulement de la charge:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1-35}$$

On utilise le terme «courant» pour désigner l'intensité d'un courant électrique. L'unité de courant est Ampère (A).

Le déplacement des électrons est causé par une *différence de potentiel électrique* entre deux points. On utilise le terme « tension » pour désigner la différence de potentiel électrique. L'unité de tension est Volt (V).

La figure 1-13 montre le *sens conventionnel* du courant et la *polarité conventionnelle* de la tension.

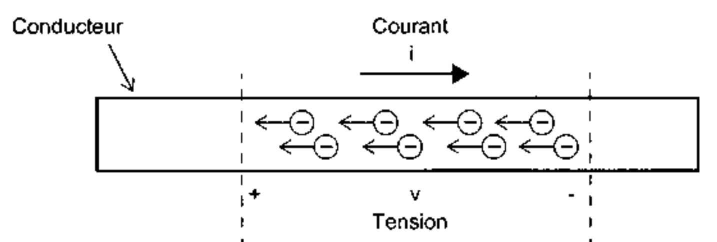


Figure 1-13 Courant et tension dans un conducteur.

Le déplacement des électrons (charge totale q) nécessite une quantité d'*énergie électrique* w qui est égale à au produit de la charge q et la tension v:

$$w = qv \tag{1-36}$$

L'unité d'énergie est Joule (J).

Le taux de variation de l'énergie électrique est défini comme la *puissance électrique* p:

$$p = \frac{dw}{dt} = v\frac{dq}{dt} = vi \tag{1-37}$$

La puissance électrique p est donc égale au produit de la tension v et le courant i:

$$p = vi \tag{1-38}$$

L'unité de puissance est Watt (W).

L'énergie électrique est égale à l'intégrale de la puissance:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt \tag{1-39}$$

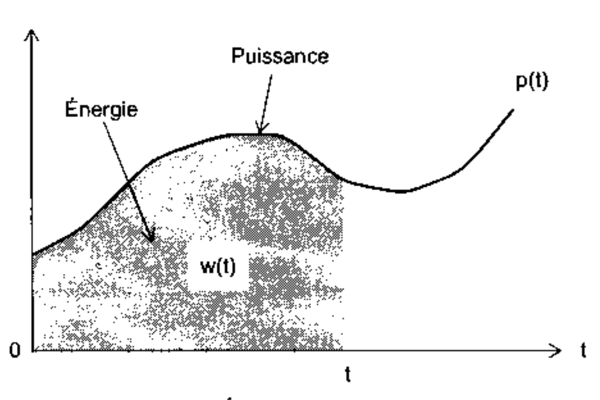


Figure 1-14 Énergie et puissance.

1.5.2 Éléments de circuits électriques

Pour établir le modèle d'un système électrique, on le «découpe» en plusieurs parties. Chaque partie sera représentée par un modèle qui est composé de plusieurs éléments de base.

Pour définir les éléments de circuits électriques, on utilise les notions de *paires de bornes* et de *multipôles*.

Bornes de connexion

Dans un circuit électrique, les connexions entre les parties sont faites par des paires de bornes. Une paire de bornes comprend deux «fils de connexion» auxquels on attribue une tension v et un courant i.

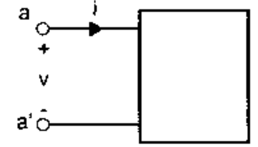


Figure 1-15 Une tension v et un courant i sont attribués à une paire de bornes.

Multipôle

Un multipôle est un élément électrique qui possède plusieurs paires de bornes. Ainsi, on a:

- dipôle: élément à une paire de bornes,
- quadripôle: élément à deux paires de bornes,
- hexapôle: élément à trois paires de bornes,
- etc.

Les différents multipôles utilisés dans les circuits électriques sont définis dans la figure 1-16.

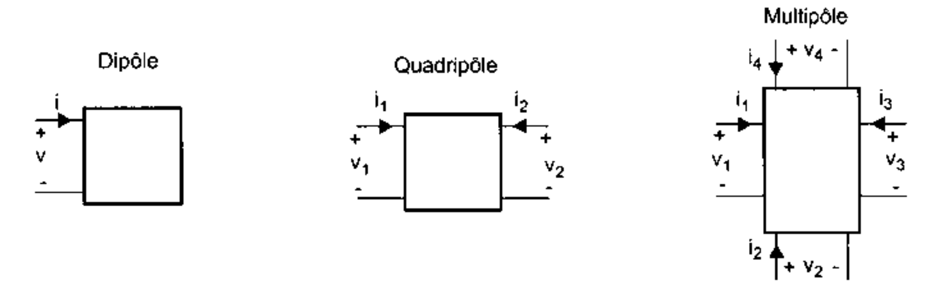


Figure 1-16 Définition des multipôles dans les circuits électriques

Les multipôles sont caractérisés par les relations entre les tensions et les courants à ses paires de bornes:

Pour un dipôle: $v = f(i)$

Pour un quadripôle:
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(i_1, i_2) \\ f_2(i_1, i_2) \end{bmatrix}$$

Pour un multipôle:
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(i_1, i_2, \dots, i_n) \\ f_2(i_1, i_2, \dots, i_n) \\ \dots \\ f_n(i_1, i_2, \dots, i_n) \end{bmatrix}$$

Ces relations sont appelées les *caractéristiques v-i* du multipôle.

La puissance *délivrée* à un multipôle est égale à:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + \dots \qquad (1\text{-}40)$$

Les *éléments de base* utilisés dans la modélisation des systèmes électriques sont les éléments idéaux dont les caractéristiques sont basées sur les phénomènes physiques fondamentaux. On peut classifier les éléments électriques en deux catégories:

- éléments actifs: source de tension, source de courant
- éléments passifs: résistance, inductance, condensateur, transformateur idéal

1.6 Éléments actifs

Les éléments actifs sont utilisés pour modéliser les sources d'énergie dans un système électrique. On définit deux sortes d'éléments actifs: source de tension et source de courant. Les sources sont divisées en deux groupes: sources indépendantes et sources commandées.

1.6.1 Sources indépendantes

Les sources indépendantes possèdent des caractéristiques qui sont indépendantes des variables du circuit.

Source de tension: élément idéal dont la tension aux bornes est égale à une fonction spécifique v_s indépendamment du courant qui le traverse.

Source de courant: élément idéal fournissant un courant égal à une fonction spécifique i_s indépendamment de la tension à ses bornes.

À noter que v_s et i_s peuvent être des constantes ou des fonctions du temps.

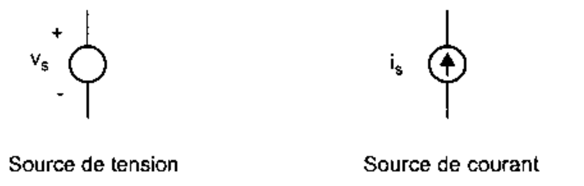


Figure 1-17 Sources indépendantes.

La convention de la polarité de la tension et du sens du courant utilisée pour les sources est illustrée dans la figure 1-18.

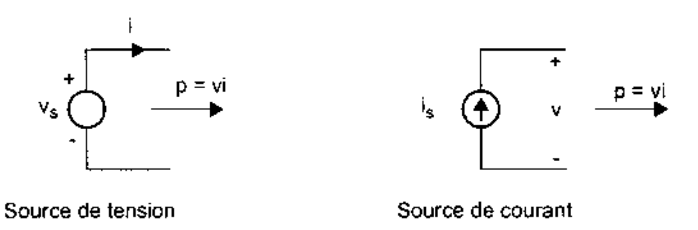


Figure 1-18 Convention de signe pour les sources.

Cette convention de signe signifie que: «la puissance fournie par une source est positive».

Une source peut fournir ou absorber de l'énergie:

$p > 0$: la source fournit de l'énergie

$p < 0$: la source absorbe de l'énergie

La figure 1-19 montre quelques exemples de sources indépendantes.

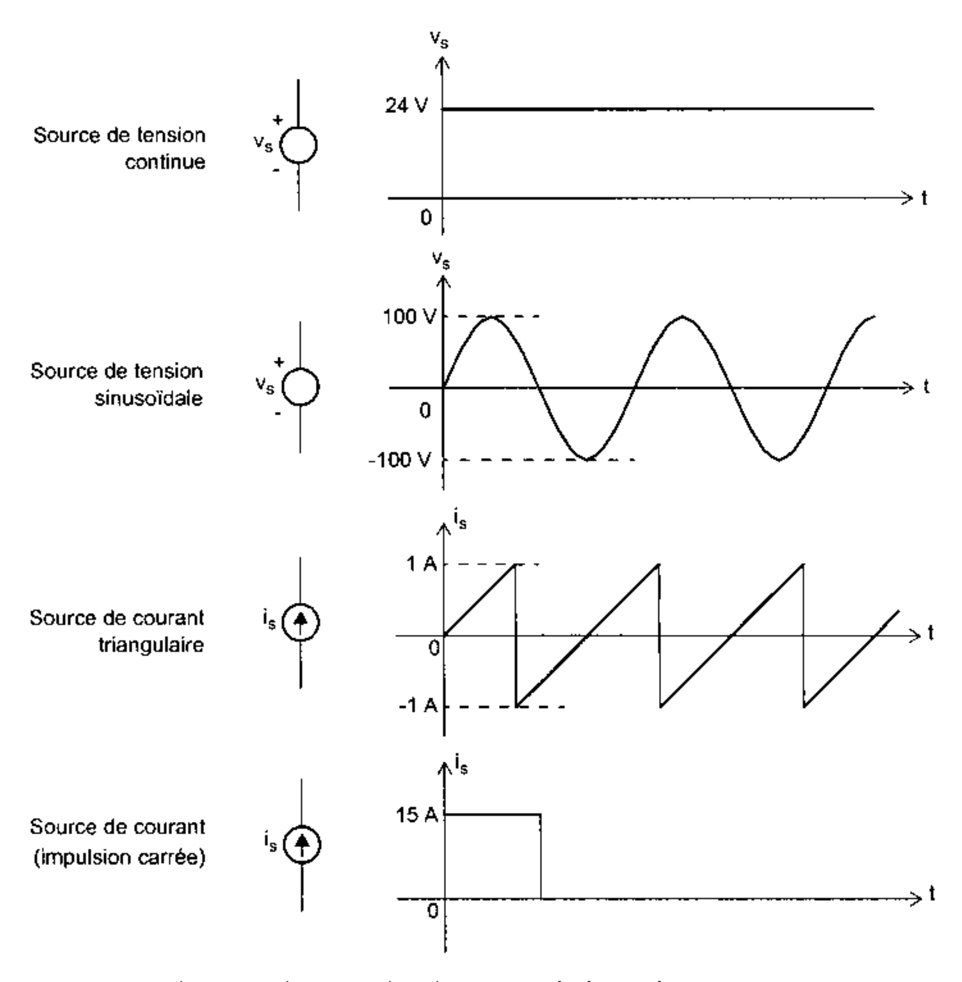


Figure 1-19 Exemples de sources indépendantes.

1.6.2 Sources commandées

Les sources commandées sont des sources de tension et des sources de courant dont la valeur dépend d'une tension ou d'un courant dans une autre partie du circuit.

Les sources commandées sont des éléments à deux paires de bornes: une paire est *l'entrée* et l'autre est *la sortie*.

Une source commandée est définie par la relation entre la tension (ou le courant) de sortie et la tension (ou le courant) d'entrée.

Les différents types de sources commandées sont définis dans la figure 1-20.

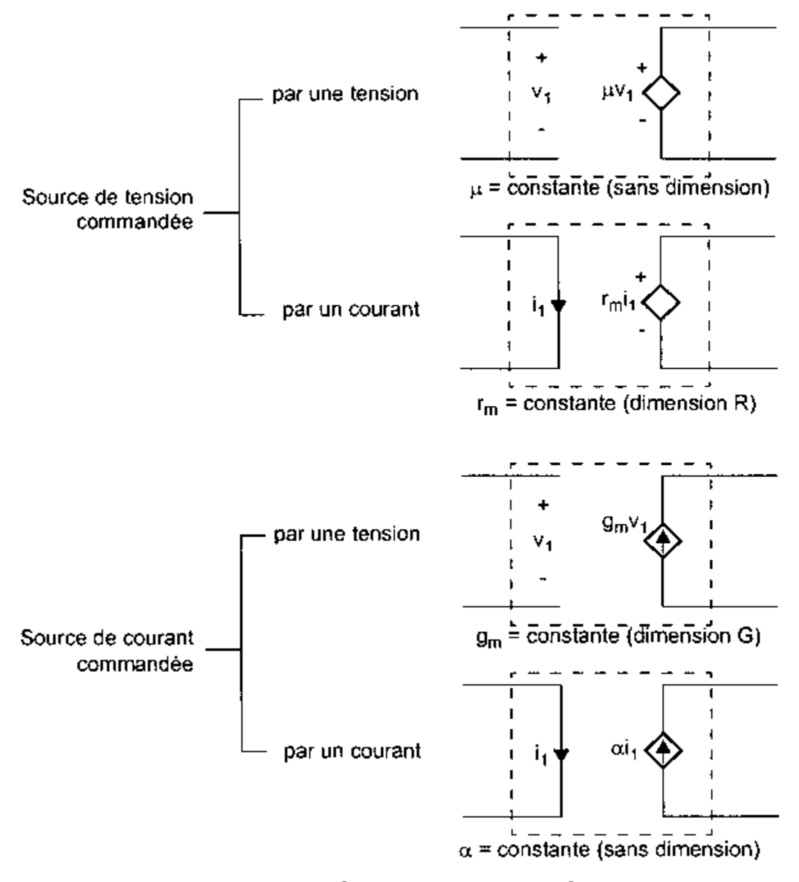


Figure 1-20 Les quatre types de sources commandées.

Remarque: Dans les sources commandées, la dépendance est *unilatérale.*

1.7 Éléments passifs

Les éléments passifs comprennent essentiellement la résistance, l'inductance, le condensateur et le transformateur idéal.

On adopte la convention de signe suivante pour les éléments passifs: «la puissance absorbée par un élément est positive».

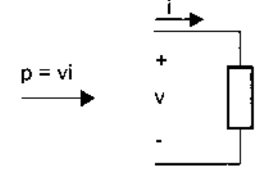


Figure 1-21 Convention de signe pour les éléments passifs.

Un élément passif peut absorber ou fournir de l'énergie:

- $p > 0$: l'élément absorbe de l'énergie
- $p < 0$: l'élément fournit de l'énergie

1.7.1 Résistance

La résistance est un élément idéal à deux bornes défini par la relation v-i suivante:

$$v = Ri \tag{1-41}$$

Dans cette relation, R est une constante appelée *résistance*. L'unité de résistance est Ohm (Ω).

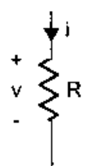


Figure 1-22 Résistance.

On peut écrire (1-41) sous la forme suivante:

$$i = \left(\frac{1}{R}\right)v = Gv \tag{1-42}$$

où G = 1/R est la conductance. L'unité de conductance est Siemens (S).

La puissance dans une résistance est égale à:

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R} \tag{1-43}$$

La puissance dans une résistance est toujours *positive*, ce qui signifie que la résistance absorbe toujours de l'énergie. C'est un élément *dissipateur d'énergie*.

Exemple 1-1 Tension, courant, puissance et énergie dans une résistance

Soit une résistance R = 5 Ω. Une source de tension carrée d'amplitude 10 V est appliquée à ses bornes.

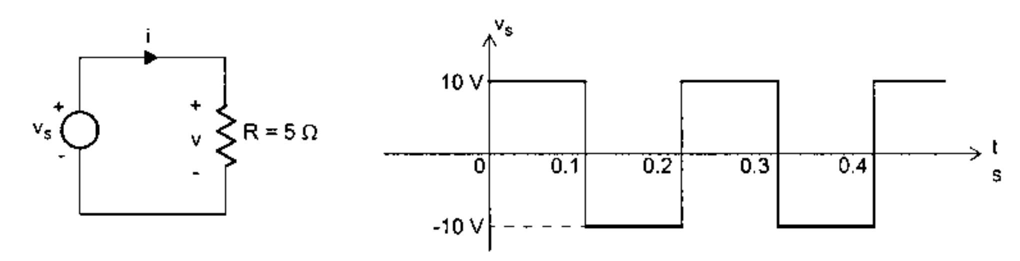


Figure 1-23 Une résistance alimentée par une source de tension carrée.

La relation entre la tension v et le courant i de la résistance R est: v = 5i

La puissance dissipée dans cette résistance est: $p = vi = 5i^2 = \frac{v^2}{5}$

L'énergie dissipée dans cette résistance est:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt = \int_{-\infty}^{t} vi\,dt = \int_{-\infty}^{t} 5i^2 dt = \int_{-\infty}^{t} \frac{v^2}{5} dt$$

La figure 1-24 montre la tension, le courant, la puissance et l'énergie dans la résistance R en fonction du temps.

Figure 1-24 Tension, courant, puissance et énergie dans la résistance R.

1.7.2 Inductance

L'inductance est un élément idéal à deux bornes défini par la relation v-i suivante:

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{1-44}$$

où L est une constante appelée inductance. L'unité d'inductance est Henry (H).

Ainsi, la tension aux bornes d'une inductance est proportionnelle au taux de variation du courant qui la traverse.

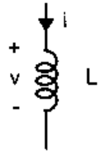


Figure 1-25 Inductance

À partir de (1-44), on écrit:

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt \tag{1-45}$$

ou encore:

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v dt + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v dt = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v dt \tag{1-46}$$

où $i(t_0)$ est le courant dans l'inductance à l'instant t_0.

L'énergie dans une inductance est obtenue en intégrant la puissance:

$$w = \int_{-\infty}^{t} vidt = \int_{-\infty}^{t} Lidi = \frac{1}{2}Li^2\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty) \tag{1-47}$$

Si $i(-\infty) = 0$ alors:

$$w = \frac{1}{2}Li^2(t) \tag{1-48}$$

L'inductance est un élément *accumulateur d'énergie*. Elle peut absorber ou fournir de l'énergie.

Exemple 1-2 Tension, courant, puissance et énergie dans une inductance

Soit une inductance L = 0.2 H. Une source de tension carrée d'amplitude 10 V est connectée à ses bornes.

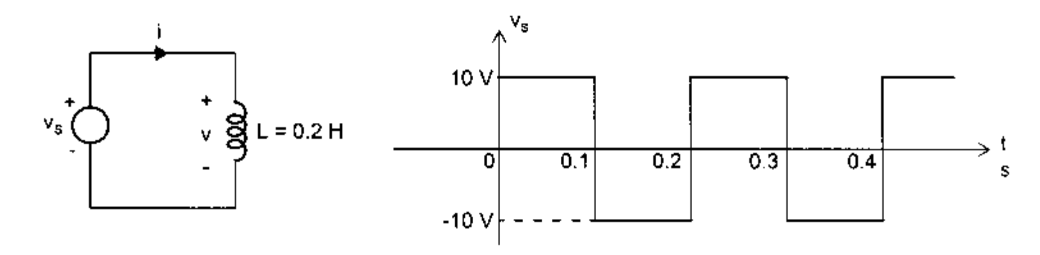


Figure 1-26 Une inductance alimentée par une source de tension carrée.

La relation entre la tension v et le courant i de l'inductance L est $v = 0.2\frac{di}{dt}$ ou bien

$$i = 5\int_{-\infty}^{t} v dt$$

La puissance délivrée à l'inductance est: $p = vi = 0.2i\frac{di}{dt}$

L'énergie emmagasinée dans cette inductance est:

$$w = \int_{-\infty}^{t} pdt = 0.2\int_{-\infty}^{t} idi = 0.1i^2\Big|_{-\infty}^{t} = 0.1i^2(t) - 0.1i^2(-\infty) = 0.1i^2(t)$$

La figure 1-27 montre la tension, le courant, la puissance et l'énergie dans l'inductance L en fonction du temps.

Figure 1-27 Tension, courant, puissance et énergie dans l'inductance L.

1.7.3 Condensateur

Le condensateur est un élément idéal à deux bornes défini par la relation v-i suivante:

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{1-49}$$

où C est une constante appelée la *capacité*. L'unité de capacité est Farad (F).

Ainsi, le courant qui traverse un condensateur est proportionnel au taux de variation de la tension à ses bornes.

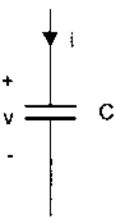


Figure 1-28 Condensateur.

À partir de (1-49), on écrit:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt \tag{1-50}$$

ou encore:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i dt + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt \tag{1-51}$$

où $v(t_0)$ est la tension aux bornes du condensateur à l'instant t_0.

L'énergie dans un condensateur est obtenue en intégrant la puissance:

$$w = \int_{-\infty}^{t} vi dt = \int_{-\infty}^{t} C v dv = \frac{1}{2}Cv^2\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Cv^2(t) - \frac{1}{2}Cv^2(-\infty) \tag{1-52}$$

Si $v(-\infty) = 0$ alors:

$$w = \frac{1}{2}Cv^2(t) \tag{1-53}$$

Le condensateur est un élément *accumulateur d'énergie*. Il peut absorber ou fournir de l'énergie.

Exemple 1-3 Tension, courant, puissance et énergie dans un condensateur

Soit un condensateur C = 1000 μF. Une source de courant carré d'amplitude 0.5 A est connectée à ses bornes.

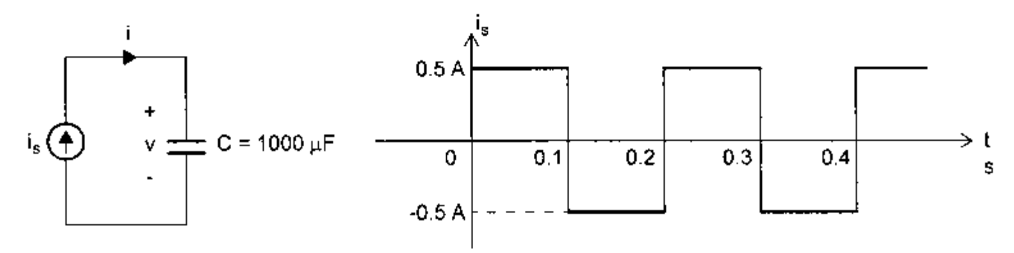


Figure 1-29 Un condensateur alimenté par une source de courant carré.

La relation entre la tension v et le courant i du condensateur est $i = 10^{-3}\frac{dv}{dt}$, ou bien

$$v = 1000\int_{-\infty}^{t} i dt$$

La puissance délivrée au condensateur C est: $p = vi = 10^{-3} v\frac{dv}{dt}$

L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p dt = 10^{-3}\int_{-\infty}^{t} v dv = 10^{-3}\frac{v^2}{2}\Big|_{-\infty}^{t} = 10^{-3}\left[\frac{v^2(t) - v^2(-\infty)}{2}\right] = 0.5\times10^{-3}v^2(t)$$

La figure 1-30 montre le courant, la tension, la puissance et l'énergie dans le condensateur C = 1000 μF en fonction du temps.

Figure 1-30 Courant, tension, puissance et énergie dans le condensateur C.

1.7.4 Transformateur idéal

Le transformateur idéal est un élément à deux paires de bornes qui représente le couplage mutuel entre deux bobines dans un système électrique. Les relations entre les tensions et les courants d'un transformateur idéal sont:

$$v_1 = av_2 \tag{1-54}$$

$$i_1 = \frac{i_2}{a} \tag{1-55}$$

où a est défini comme le *rapport de transformation* du transformateur.

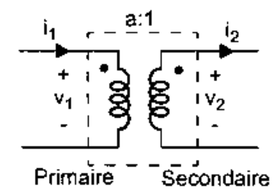


Figure 1-31 Transformateur idéal.

Exemple 1-4 Tension et courant d'un transformateur

Une source de tension v_s est connectée au primaire d'un transformateur de rapport a = 4. Une résistance R est connectée au secondaire du transformateur.

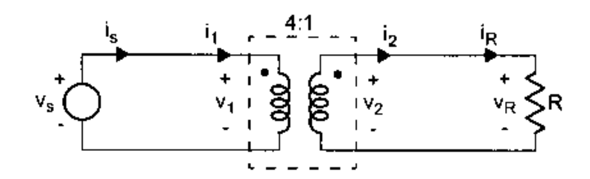


Figure 1-32 Un transformateur avec une charge résistive.

On a:

$$v_1 = v_s = 4v_2$$

La tension au secondaire est égale à:

$$v_2 = \frac{v_1}{4} = \frac{v_s}{4}$$

Le courant au secondaire (dans la résistance R) est égal à:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_s}{4R}$$

Le courant au primaire (dans la source v_s) est égal à:

$$i_s = i_1 = \frac{i_R}{4} = \frac{(v_R/R)}{4} = \frac{(v_s/(4R))}{4} = \frac{v_s}{16R}$$

1.8 Amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel est un composant électronique complexe, disponible sous forme de circuit intégré, que l'on appelle communément «ampli op». Un amplificateur opérationnel est constitué de plusieurs éléments: transistors, diodes, résistances, condensateurs. Les amplificateurs opérationnels sont utilisés comme *éléments actifs* dans les circuits électroniques analogiques pour réaliser diverses fonctions: amplificateur, oscillateur, filtre, comparateur, sommateur, etc.

Il existe plusieurs sortes d'amplificateur opérationnel. La plus utilisée est un *amplificateur de tension* avec des caractéristiques proches des caractéristiques idéales: gain très élevé, impédance d'entrée très élevée, impédance de sortie très faible.

La figure 1-33 montre un amplificateur opérationnel réel (le uA741) avec son circuit interne et ses caractéristiques.

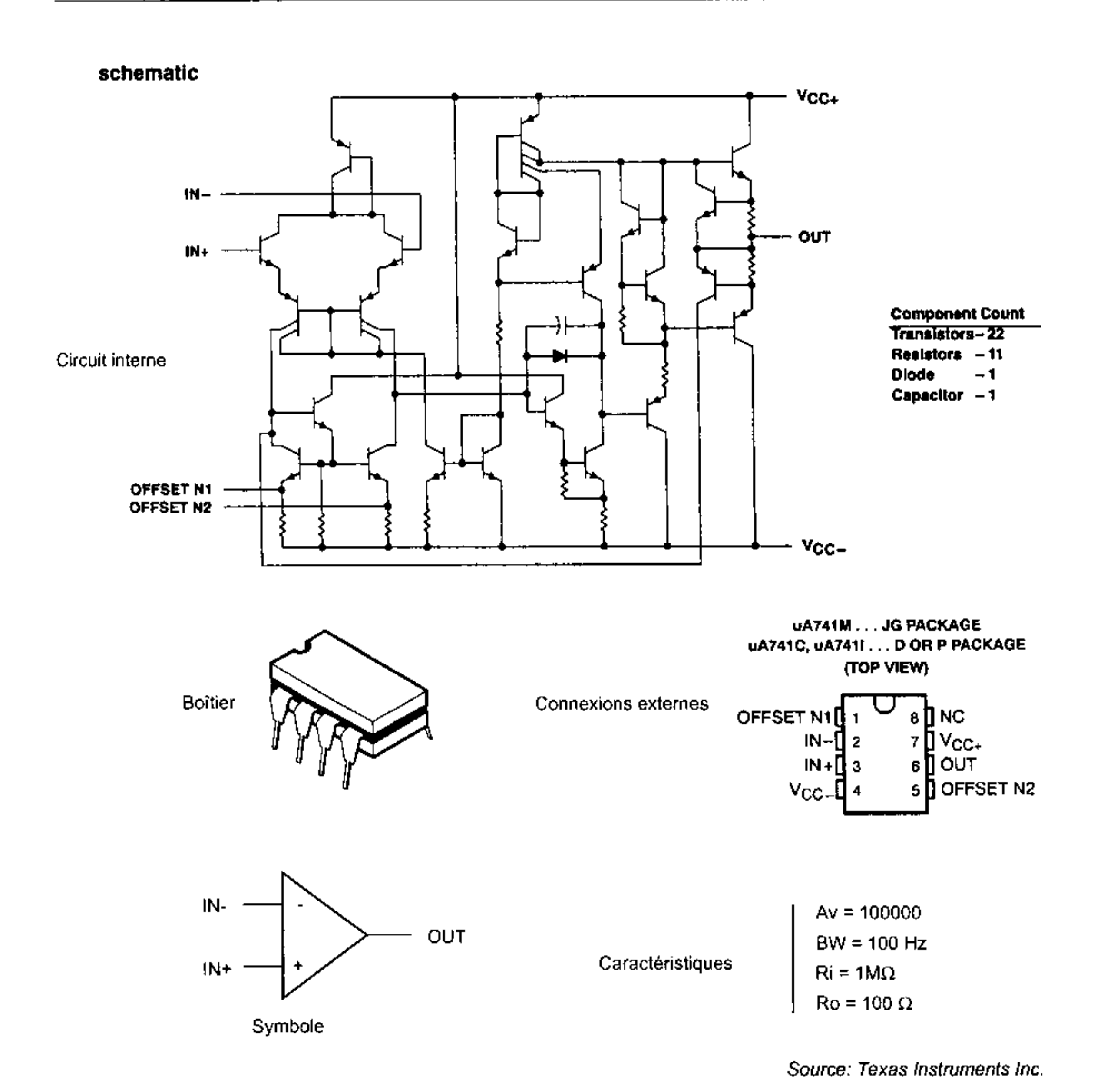


Figure 1-33 Le uA741 - Un amplificateur opérationnel réel.

(Remarque: Le uA741 est l'amplificateur opérationnel le plus utilisé de tous les temps!)

Le modèle d'un amplificateur opérationnel idéal est une source de tension commandée par une tension tel qu'illustre la figure 1-34.

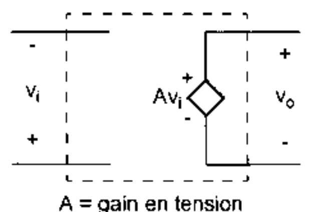


Figure 1-34 Amplificateur opérationnel idéal.

Dans ce modèle, v_i est la *tension d'entrée*, v_o est la *tension de sortie*, et A est le *gain en tension* de l'amplificateur opérationnel.

On peut ajouter au modèle idéal deux résistances (R_i et R_o) qui représentent les résistances d'entrée et de sortie. On obtient ainsi un «modèle simple» d'un amplificateur opérationnel, illustré dans la figure 1-35.

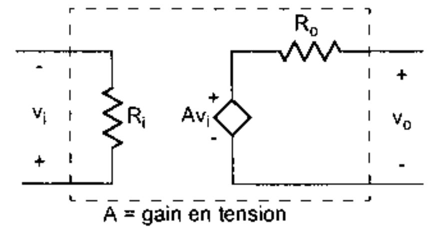


Figure 1-35 Modèle simple d'un amplificateur opérationnel.

Exercices

1.1 Une source de tension v_s est connectée aux bornes d'une résistance de 10 Ω.

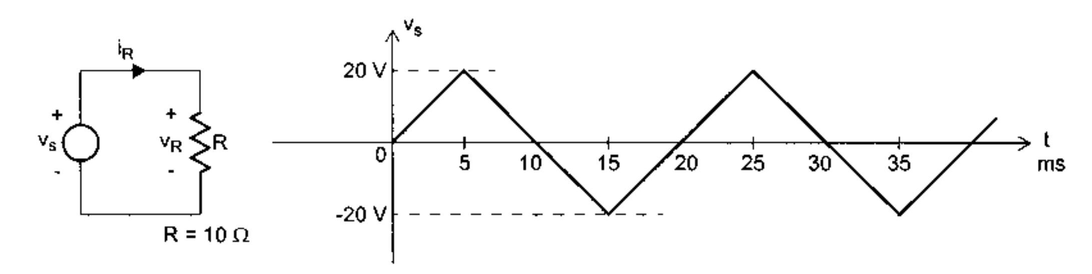


Figure E1.1

Déterminer et tracer en fonction du temps la tension, le courant, la puissance et l'énergie dans cette résistance.

1.2 Une source de tension v_s est connectée aux bornes d'un condensateur de 250 μF.

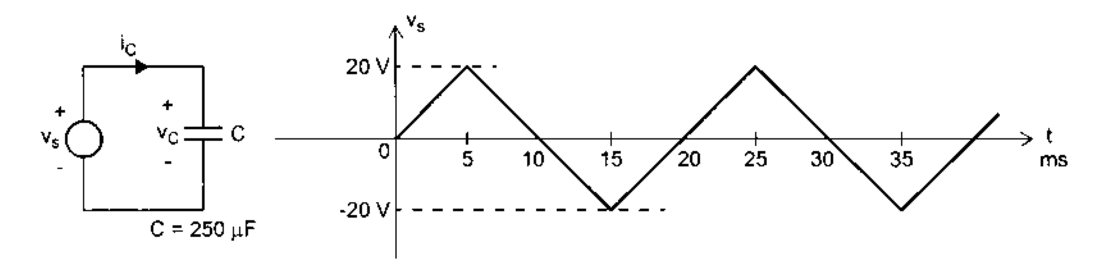


Figure E1.2

Déterminer et tracer en fonction du temps la tension, le courant, la puissance et l'énergie dans ce condensateur.

1.3 Une source de tension v_s est connectée aux bornes d'une inductance de 100 mH.

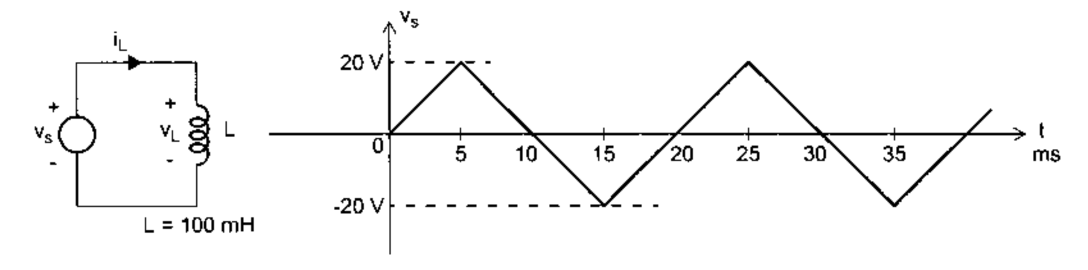


Figure E1.3

Déterminer et tracer en fonction du temps la tension, le courant, la puissance et l'énergie dans cette inductance.

1.4 Soit le circuit montré dans la figure E1.4.

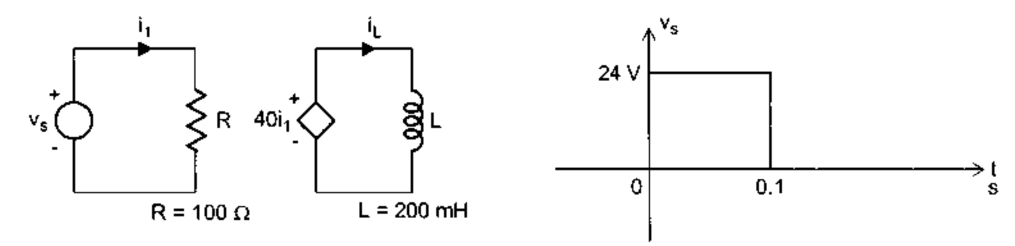


Figure E1.4

Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, le courant i_L et l'énergie accumulée dans l'inductance L.

1.5 Soit le circuit montré dans la figure E1.5.

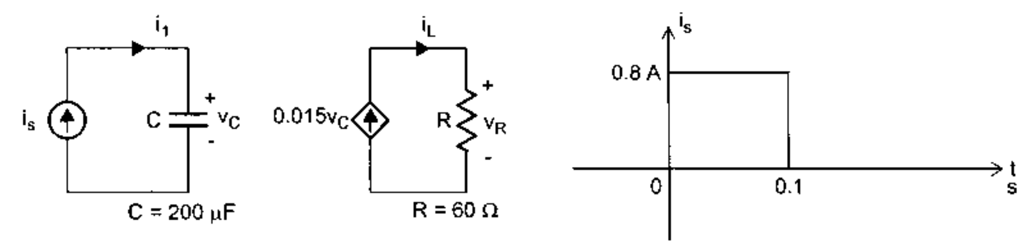


Figure E1.5

Déterminer et tracer en fonction du temps la tension v_C, la tension v_R, l'énergie dissipée dans la résistance R et l'énergie accumulée dans le condensateur C.

1.6 Une résistance de 20 Ω est connectée à une source de tension sinusoïdale par l'intermédiaire d'un transformateur idéal de rapport 5.

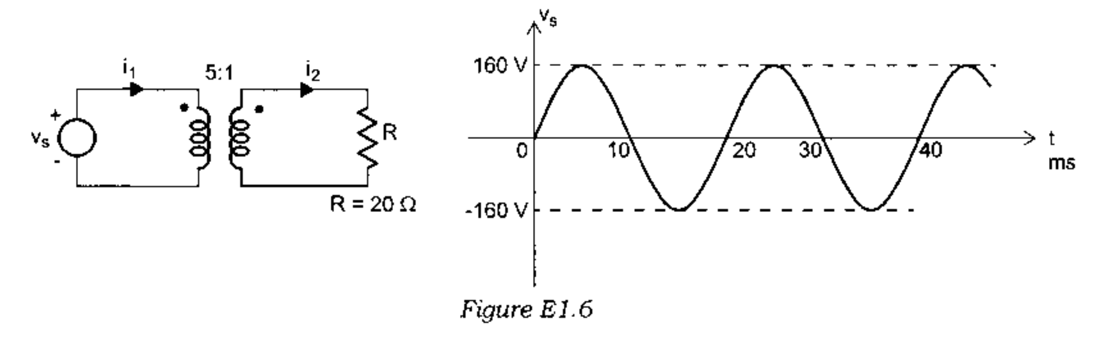


Figure E1.6

Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, le courant i_2 et la puissance dissipée dans la résistance R.

1.7 Une source de tension v_s alimente trois éléments R, L, C connectés en série.

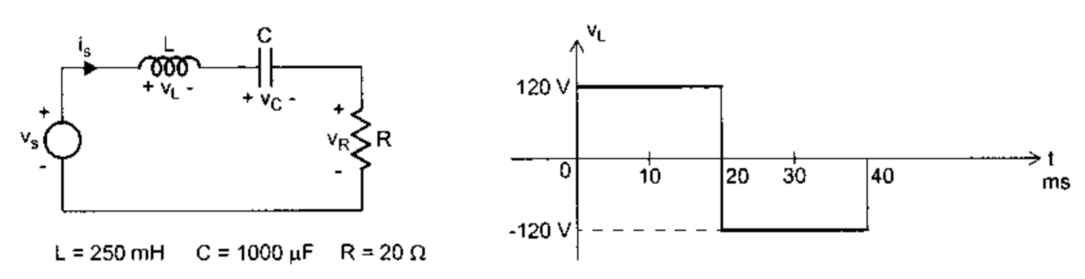


Figure E1.7

La tension v_L aux bornes de l'inductance est donnée dans la figure E1.7.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps les tensions v_C, v_R et v_s.

b) Déterminer et tracer en fonction du temps la puissance et l'énergie fournies par la source v_s.

Remarques:

- Le même courant circule dans les trois éléments R, L, C.
- La tension v_s est égale à la somme des tensions v_L, v_C et v_R: $v_s = v_L + v_C + v_R$

1.8 Soit le circuit montré dans la figure E1.8.

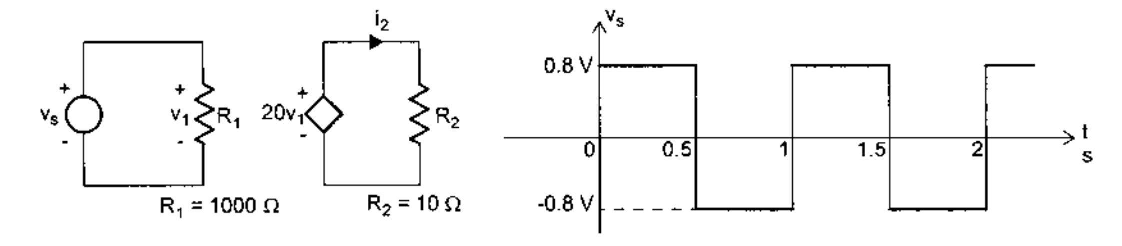


Figure E1.8

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_2 et la puissance dissipée dans la résistance R_2.

b) Déterminer et tracer en fonction du temps la puissance fournie par la source v_s. Comparer avec la puissance dissipée dans la résistance R_2.

Chapitre 2

LOIS ET THÉORÈMES DE CIRCUITS

Dans ce chapitre, les lois fondamentales qui régissent les relations entre les variables des circuits électriques sont étudiées. Les théorèmes de Thévenin et de Norton qui permettent de déterminer les équivalents d'un circuit sont présentés et appliqués à des circuits résistifs simples. La notion de linéarité des circuits électriques est introduite.

2.1 Branches et noeuds d'un circuit électrique

Un circuit électrique (ou un réseau électrique) est un ensemble d'éléments idéals (incluant les sources et les éléments passifs) qui sont connectés ensemble de façon à constituer le modèle d'un système électrique.

Les éléments constituent des *branches* du circuit.

Les points de connexion des éléments sont appelés les *noeuds* du circuit.

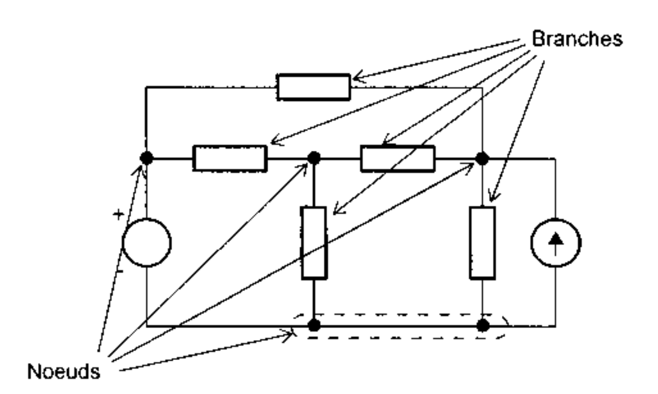


Figure 2-1 Branches et noeuds d'un circuit électrique.

Dans chaque branche du circuit, on peut définir une variable «tension v» et une variable «courant i» en utilisant la convention de signe montrée dans la figure 2-2.

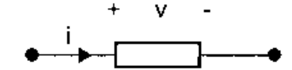


Figure 2-2 Convention de signe pour un élément à deux bornes.

2.2 Lois de Kirchhoff

Les relations entre les courants à un noeud et entre les tensions dans un parcours fermé d'un circuit électrique sont définies par les deux lois de Kirchhoff: loi des courants et loi des tensions.

2.2.1 Loi des courants

La loi des courants de Kirchhoff est énoncée comme suit:

La somme algébrique des courants à un noeud d'un circuit électrique est égale à zéro.

On écrit:

$$\sum_{k=1}^{N} i_k = 0 \qquad \text{à un noeud} \qquad (2\text{-}1)$$

On applique la convention de signe suivante:

- courant qui *arrive* à un noeud: signe +
- courant qui *quitte* un noeud: signe -

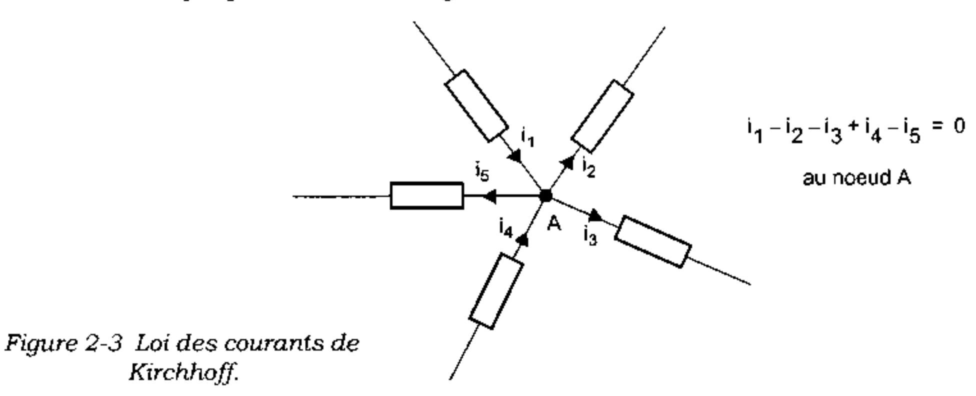


Figure 2-3 Loi des courants de Kirchhoff.

On déduit que:

La somme des courants qui arrivent à un noeud est égale à la somme des courants qui le quittent.

Alors, pour le noeud A montré dans la figure 2-3, on peut écrire:

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 + i_5 \qquad (2\text{-}2)$$

On peut généraliser la loi des courants pour une surface fermée:

La somme des courants qui entrent dans une surface fermée est égale à la somme des courants qui en sortent.

2.2.2 Lois des tensions

La loi des tensions de Kirchhoff est énoncée comme suit:

La somme algébrique des tensions dans un parcours fermé d'un circuit électrique est égale à zéro.

On écrit:

$$\sum_{k=1}^{N} v_k = 0 \qquad \text{dans un parcours fermé} \qquad (2\text{-}3)$$

On applique la convention de signe suivante:

En suivant un sens donné sur le parcours:

- si la borne + est rencontrée avant: la tension a le signe +
- si la borne - est rencontrée avant: la tension a le signe -

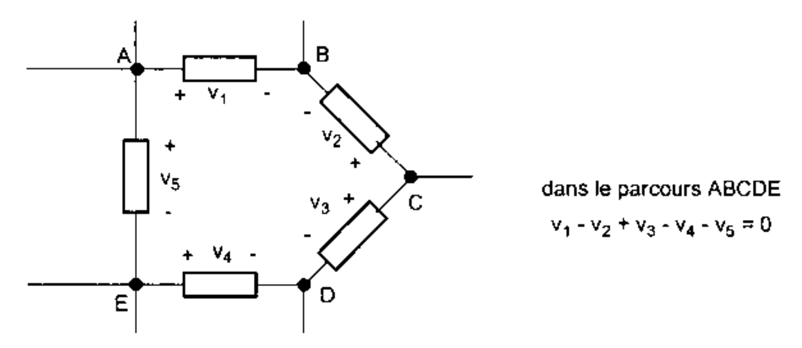


Figure 2-4 Loi des tensions de Kirchhoff.

On déduit que:

La tension entre deux noeuds donnés est égale à la somme algébrique des tensions sur n'importe quel parcours qui relie ces deux noeuds.

Alors, dans le circuit de la figure 2-4 la tension v_{AD} peut être calculée en suivant les deux parcours ABCD et AED:

$$v_{AD} = v_1 - v_2 + v_3 = v_5 + v_4 \qquad (2\text{-}4)$$

<u>Exemple 2-1</u> Application des lois de Kirchhoff à un circuit électrique

Soit le circuit montré dans la figure 2-5.

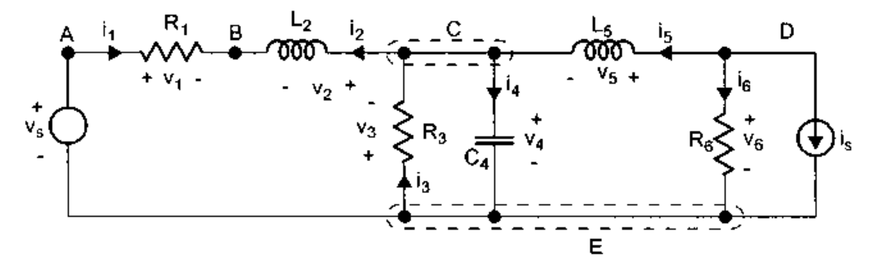


Figure 2-5 Un circuit à six éléments.

Ce circuit comprend 2 sources et 6 éléments. Les tensions et les courants sont définis tel qu'indiqué dans la figure.

En appliquant la loi des courants à des noeuds B, C et D on obtient les équations suivantes:

$i_1 + i_2 = 0$ au noeud B

$-i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0$ au noeud C

$i_5 + i_6 + i_s = 0$ au noeud D

En appliquant la loi des tensions aux parcours fermés ABCE, CEC et CDE on obtient

les équations suivantes:

$v_s = v_1 - v_2 - v_3$ dans le parcours ABCE

$v_3 + v_4 = 0$ dans le parcours CEC

$v_4 = -v_5 + v_6$ dans le parcours CDE

2.3 Dipôles équivalents

Un dipôle est un *circuit à une paire de bornes* auquel on a attribué une tension v et un courant i. Un dipôle est défini par la relation entre la tension v et le courant i, v = f(i), que l'on appelle la *relation v-i*.

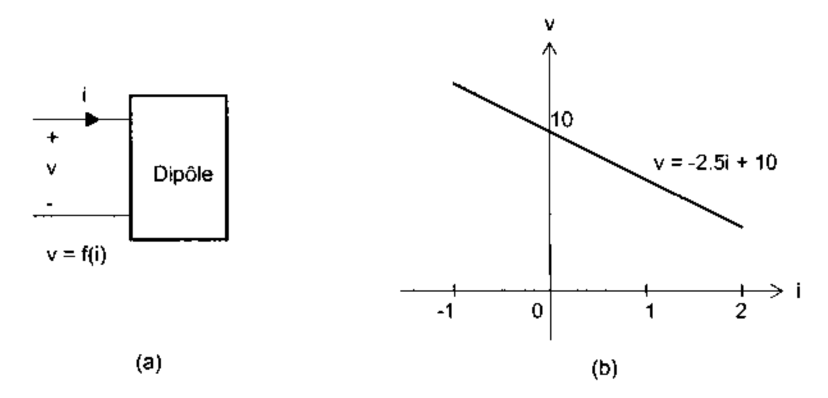


Figure 2-6 Un dipôle électrique.
(a) Les variables d'un dipôle. (b) Un exemple de relation v-i.

Deux dipôles sont définis équivalents si leurs relations v-i sont identiques.

Le concept de dipôles équivalents (ou circuits équivalents) permet de simplifier l'analyse lorsqu'on s'intéresse seulement aux variables externes du dipôle.

2.3.1 Équivalent série de sources de tension

Considérons deux sources de tension v_{s1} et v_{s2} connectées en série. Le même courant circule dans les deux sources.

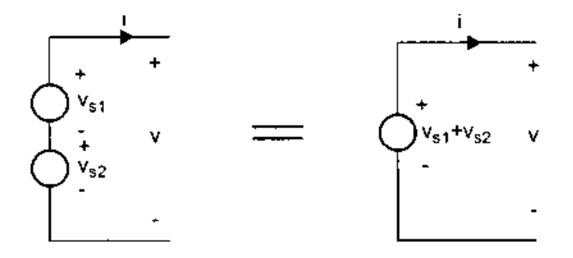


Figure 2-7 Équivalent série de deux sources de tension.

En appliquant la loi des tensions, on peut écrire:

$$v = v_{s1} + v_{s2} \tag{2-5}$$

Par conséquent, l'équivalent de deux sources de tension connectées en série est une source de tension égale à la somme des deux sources.

Ce résultat peut être généralisé au cas de plusieurs sources de tension en série.

Remarque: Les sources de tension ne peuvent être connectées en parallèle car cette connexion ne respecte pas la loi des tensions de Kirchhoff.

Exemple 2-2 Sources de tensions en série

On connecte en série deux sources de tension: $v_{s1} = 20$ et $v_{s2} = 15\sin(2000\pi t)$.

On obtient une source de tension équivalente égale à:

$$v_s = v_{s1} + v_{s2} = 20 + 15\sin(2000\pi t)$$

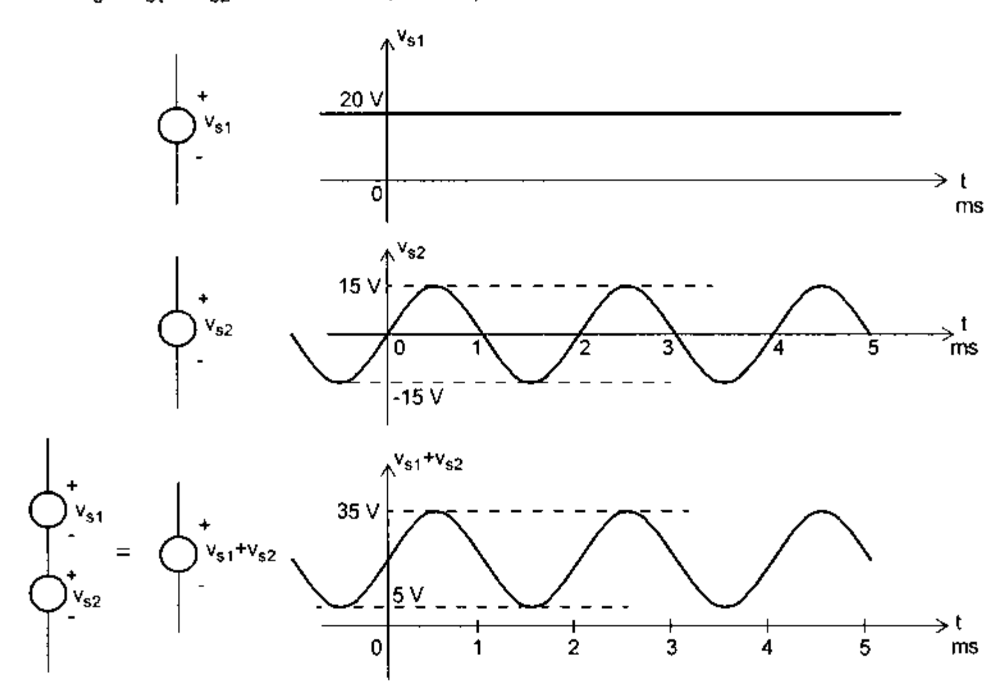


Figure 2-8 Équivalent de deux sources de tension en série.

2.3.2 Équivalent parallèle de sources de courant

Considérons deux sources de courant i_{s1} et i_{s2} connectées en parallèle. Les deux sources de courant ont la même tension à leurs bornes.

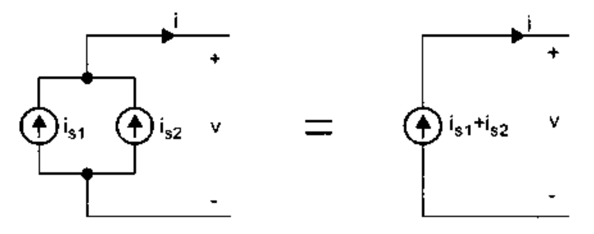


Figure 2-9 Équivalent parallèle de deux sources de courant.

En appliquant la loi des courants, on peut écrire:

$$i = i_{s1} + i_{s2} \tag{2-6}$$

Par conséquent, l'équivalent de deux sources de courant connectées en parallèle est une source de courant égale à la somme des deux sources.

Ce résultat peut être généralisé au cas de plusieurs sources de courant en parallèle.

Remarque: Les sources de courant ne peuvent être connectées en série car cette connexion ne respecte pas la loi des courants de Kirchhoff.

Exemple 2-3 Sources de courant en parallèle

On connecte en parallèle deux sources de courant: i_{s1} = 10 mA et i_{s2} = 20sin(2000πt) mA suivant la connexion montrée dans la figure 2-10.

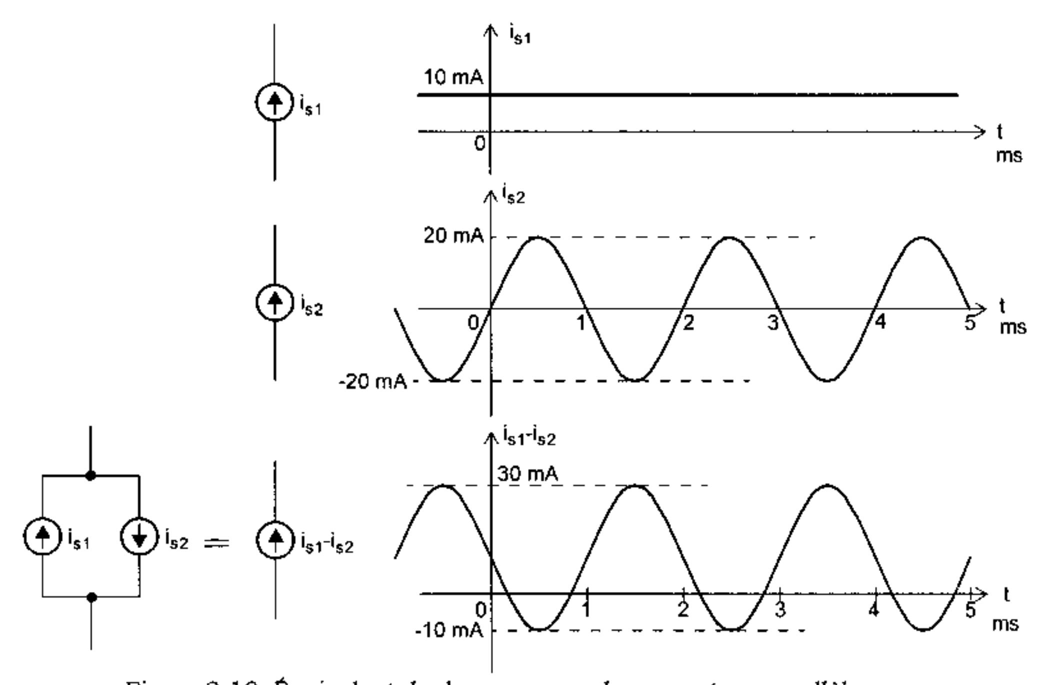


Figure 2-10 Équivalent de deux sources de courant en parallèle.

On obtient une source de courant équivalente de valeur:

$$i_s = i_{s1} - i_{s2} = [10 - 20\sin(2000\pi t)] \text{ mA}$$

2.3.3 Équivalent série d'éléments - Diviseur de tension

Équivalent série de résistances

Considérons deux résistances R_1 et R_2 connectées en série tel que montré dans la figure 2-11.

Les courants dans les deux résistances sont identiques: $i = i_1 = i_2$

À l'aide des lois de Kirchhoff, on écrit:

$$v = v_1 + v_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i \tag{2-7}$$

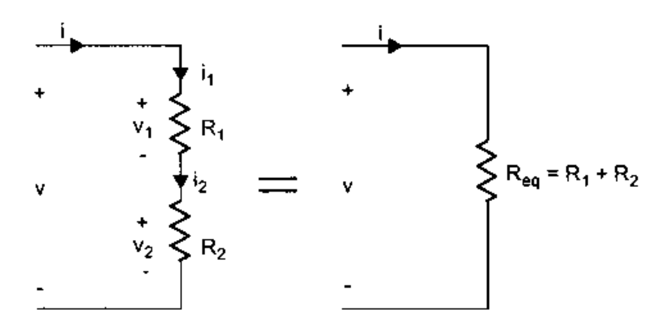


Figure 2-11 Équivalent série de deux résistances

Cette relation v-i est identique à celle d'une résistance unique R_{eq} dont la valeur est donnée par la relation suivante:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{2-8}$$

La tension v à l'entrée est divisée en deux tensions v_1 et v_2 aux bornes de chaque résistance R_1 et R_2. Ces tensions sont données par les relations suivantes:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times v \tag{2-9}$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times v \tag{2-10}$$

Ces relations constituent la loi du *diviseur de tension*.

<u>Généralisation</u>: Équivalent série de plusieurs résistances

Pour le cas de N résistances connectées en série,

- la résistance équivalente est égale à la somme de toutes les résistances

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N \tag{2-11}$$

- la tension aux bornes d'une résistance R_k est donnée par la loi du diviseur de tension:

$$v_k = \frac{R_k}{R_{eq}} \times v \tag{2-12}$$

où v est la tension totale aux bornes des N résistances.

<u>Exemple 2-4</u> Diviseur de tension

Une source de tension sinusoïdale v_s = 120sin(500πt) est connectée à trois résistances en série.

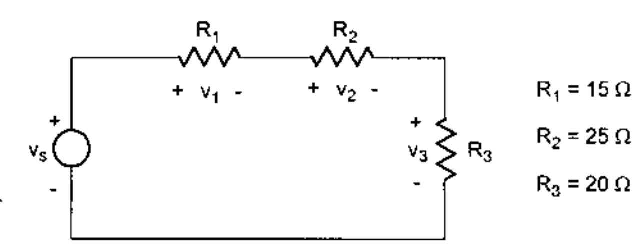


Figure 2-12 Exemple de diviseur de tension

La résistance équivalente des trois résistances en série est égale à:

$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = (15 + 25 + 20)\ \Omega = 60\ \Omega$

Les tensions aux bornes de R_1, R_2, et R_3 sont données par la loi de diviseur de tension:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_{eq}}v_s = \frac{15}{60}120\sin(500\pi t) = 30\sin(500\pi t)$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_{eq}}v_s = \frac{25}{60}120\sin(500\pi t) = 50\sin(500\pi t)$$

$$v_3 = \frac{R_3}{R_{eq}}v_s = \frac{20}{60}120\sin(500\pi t) = 40\sin(500\pi t)$$

Équivalent série d'inductances

En utilisant la même approche pour les résistances, on détermine l'équivalent de deux inductances connectées en série comme:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \tag{2-13}$$

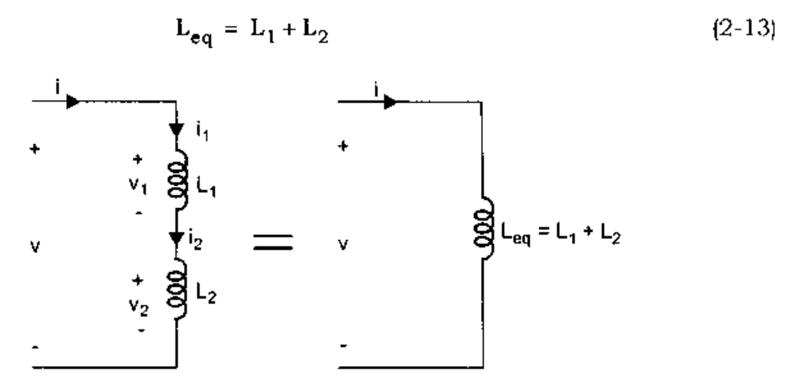


Figure 2-13 Équivalent série de deux inductances.

Les tensions v_1 et v_2 aux bornes des inductances en série sont données par la loi du diviseur de tension inductif:

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \times v \tag{2-14}$$

$$v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \times v \tag{2-15}$$

Généralisation: Équivalent série de plusieurs inductances

Pour le cas de N inductances connectées en série,

- l'inductance équivalente est égale à la somme de toutes les inductances:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N \tag{2-16}$$

- la tension aux bornes d'une inductance L_k est donnée par la loi du diviseur de tension inductif:

$$v_k = \frac{L_k}{L_{eq}} \times v \tag{2-17}$$

où v est la tension totale aux bornes des N inductances.

Équivalent série de condensateurs

En utilisant la même approche pour les résistances, on détermine l'équivalent de deux condensateurs connectés en série comme:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{2-18}$$

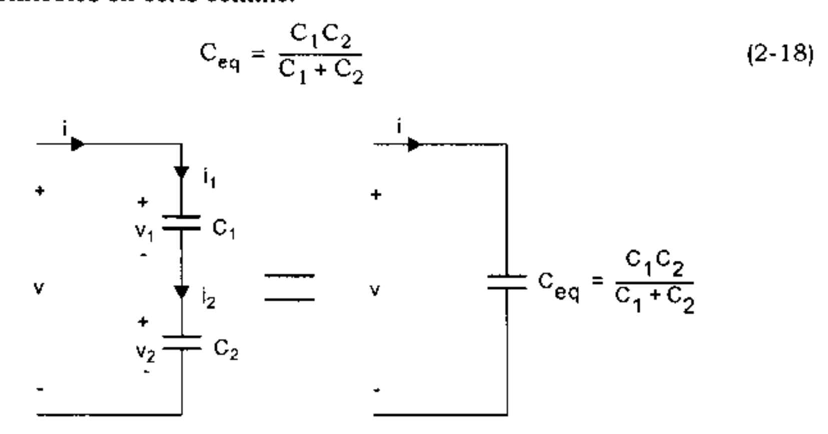


Figure 2-14 Équivalent série de deux condensateurs.

Les tensions v_1 et v_2 aux bornes des condensateurs en série sont données par la loi du diviseur de tension capacitif:

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \times v \tag{2-19}$$

$$v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times v \tag{2-20}$$

Généralisation: Équivalent série de plusieurs condensateurs

Pour le cas de N condensateurs connectés en série,

- le condensateur équivalent est donné par:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} \tag{2-21}$$

- la tension aux bornes d'un condensateur C_k est donnée par la loi du diviseur de tension capacitif:

$$v_k = \frac{C_{eq}}{C_k} \times v \tag{2-22}$$

où v est la tension totale aux bornes des N condensateurs.

2.3.4 Équivalent parallèle d'éléments - Diviseur de courant

Équivalent parallèle de résistances

Considérons deux résistances R_1 et R_2 connectées en parallèle tel que montré dans la figure 2-15.

La même tension se retrouve aux bornes des deux résistances: $v = v_1 = v_2$

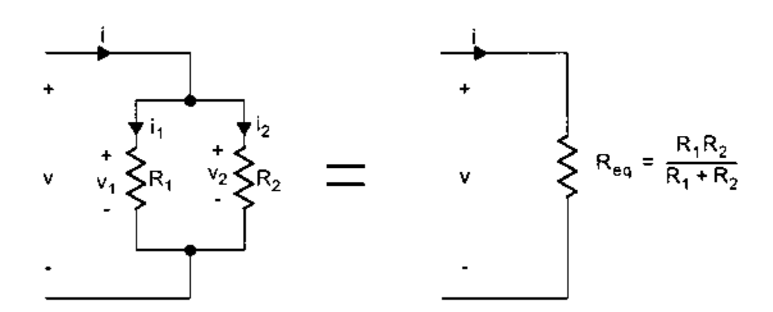


Figure 2-15 Équivalent parallèle de deux résistances.

À l'aide des lois de Kirchhoff, on écrit:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v = \frac{v}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)} = \frac{v}{R_{eq}} \tag{2-23}$$

Cette relation v-i est identique à celle d'une résistance unique R_{eq} dont la valeur est donnée par la relation suivante:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2-24}$$

ou bien

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2-25}$$

Le courant i à l'entrée est divisé en deux branches i_1 et i_2. Chaque courant peut être calculé:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times i \tag{2-26}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times i \tag{2-27}$$

Ces relations constituent la loi du *diviseur de courant.*

<u>Généralisation</u>: Équivalent parallèle de plusieurs résistances

Pour le cas de N résistances connectées en parallèle,

- la *conductance équivalente* est égale à la somme de toutes les conductances:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_N \tag{2-28}$$

- le courant dans une résistance R_k est donné par la loi du *diviseur de courant*:

$$i_k = \frac{R_{eq}}{R_k} \times i = \frac{G_k}{G_{eq}} \times i \tag{2-29}$$

où i est le courant total.

Exemple 2-5 Diviseur de courant

Une source de courant i_s = 1.5 A alimente trois résistances en parallèle.

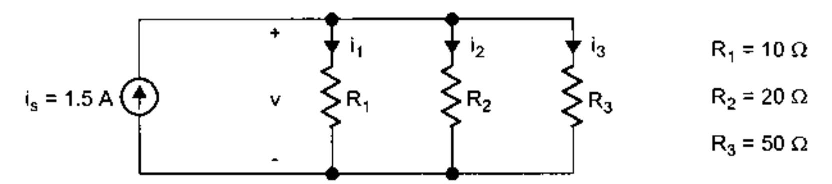


Figure 2-16 Exemple de diviseur de courant.

La conductance équivalente des trois résistances en parallèle est donnée par:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50} = \frac{17}{100}\ \text{S}$$

On déduit la résistance équivalente:

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{100}{17} = 5.882\Omega$$

Les courants dans R_1, R_2, et R_3 sont donnés par la loi du diviseur de courant:

$$i_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} i_s = \frac{5.882}{10}(1.5) = 0.882\text{A}$$

$$i_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} i_s = \frac{5.882}{20}(1.5) = 0.441\text{A}$$

$$i_3 = \frac{R_{eq}}{R_3} i_s = \frac{5.882}{50}(1.5) = 0.177\text{A}$$

Équivalent parallèle d'inductances

En utilisant la même approche pour les résistances, on détermine l'équivalent de deux inductances connectées en parallèle:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{2-30}$$

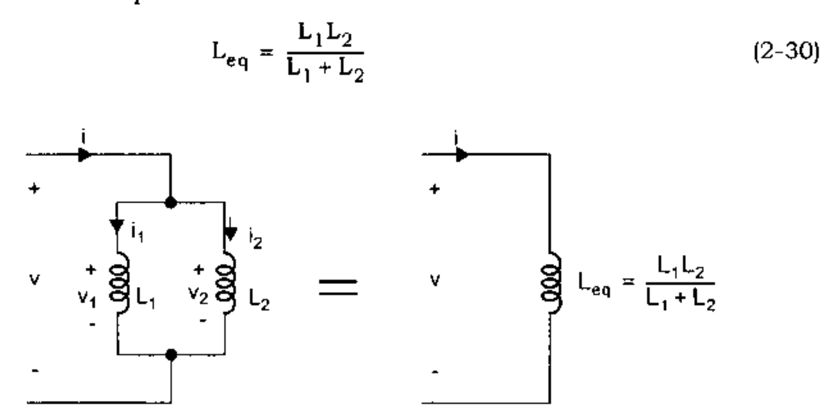


Figure 2-17 Équivalent parallèle de deux inductances.

Les courants i_1 et i_2 dans les inductances en parallèle sont donnés par la loi du diviseur de courant inductif:

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \times i \qquad (2\text{-}31)$$

$$i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \times i \qquad (2\text{-}32)$$

Généralisation: Équivalent parallèle de plusieurs inductances

Pour le cas de N inductances connectées en parallèle,

- l'inductance équivalente est donnée par:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N} \qquad (2\text{-}33)$$

- le courant dans une inductance L_k est donné par la loi du *diviseur de courant inductif*:

$$i_k = \frac{L_{eq}}{L_k} \times i \qquad (2\text{-}34)$$

où i est le courant total.

Équivalent parallèle de condensateurs

En utilisant la même approche que pour les résistances, on détermine l'équivalent de deux condensateurs connectés en parallèle:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \qquad (2\text{-}35)$$

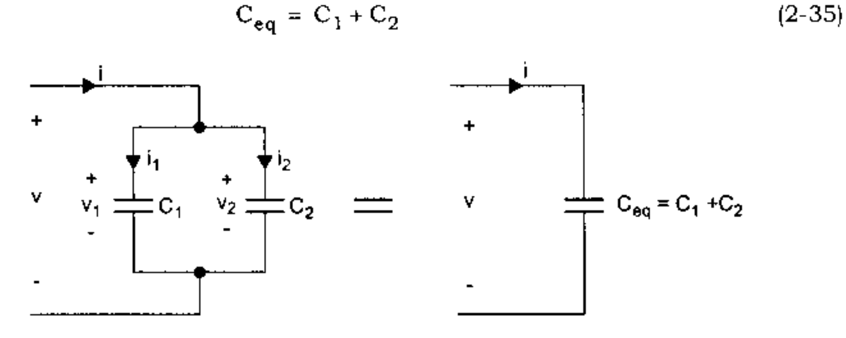


Figure 2-18 Équivalent parallèle de deux condensateurs.

Les courants i_1 et i_2 dans les condensateurs en parallèle sont donnés par la loi du diviseur de courant capacitif:

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times i \qquad (2\text{-}36)$$

$$i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \times i \qquad (2\text{-}37)$$

Généralisation: Équivalent parallèle de plusieurs condensateurs

Pour le cas de N condensateurs connectés en parallèle,

- la capacité équivalente est égale à la somme des capacités:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N \qquad (2\text{-}38)$$

- le courant dans un condensateur C_k est donné par la loi du *diviseur de courant capacitif:*

$$i_k = \frac{C_k}{C_{eq}} \times i \tag{2-39}$$

où i est le courant total.

2.3.5 Équivalent "*source de tension - source de courant*"

Considérons un dipôle D (avec deux bornes A-B) composé d'une source de tension v_s en série avec une résistance R_s.

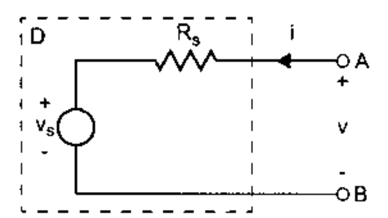


Figure 2-19 Dipôle composé d'une source de tension en série avec une résistance.

La relation v-i du dipôle s'écrit:

$$v = R_s i + v_s \tag{2-40}$$

Cette relation peut être exprimée sous forme:

$$i = \frac{v}{R_s} - \frac{v_s}{R_s} \tag{2-41}$$

Dans cette dernière relation, chaque terme du deuxième membre représente un courant:

$\frac{v}{R_s}$ = courant dans une résistance R_s avec la tension à ses bornes égale à v,

$\frac{-v_s}{R_s}$ = source de courant qui arrive au noeud A.

À partir de cette relation, on peut établir un circuit équivalent du dipôle D qui est constitué d'une source de courant i_s en parallèle avec une résistance égale à R_s avec:

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \tag{2-42}$$

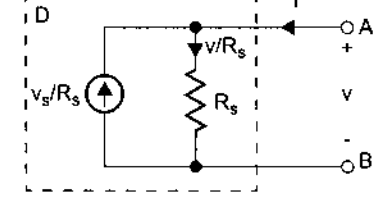


Figure 2-20 Dipôle équivalent composé d'une source de courant en parallèle avec une résistance.

Cette équivalence peut être appliquée dans les deux sens pour convertir «une source de tension en série avec une résistance» en «une source de courant en parallèle avec une résistance» et vice versa.

La figure 2-21 montre l'équivalent *source de tension-source de courant* qui peut être utilisé pour simplifier l'analyse des circuits complexes.



Figure 2-21 Équivalent "source de tension-source de courant".

2.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de déterminer le circuit équivalen d'un dipôle.

2.4.1 Théorème de Thévenin

Le circuit équivalent d'un dipôle D est constitué d'une source de tension v_T en série ave une résistance R_T, avec:

v_T = tension aux bornes du dipôle en circuit ouvert (lorsque le dipôle n'est pas connecté à un autre circuit),

R_T = résistance équivalente du dipôle lorsque toutes les sources indépendantes du dipôle sont annulées.

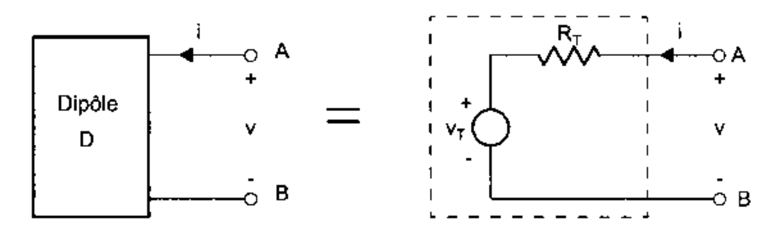


Figure 2-22 Équivalent de Thévenin.

Remarque:

- Source de tension de valeur 0 = court-circuit
- Source de courant de valeur 0 = circuit ouvert

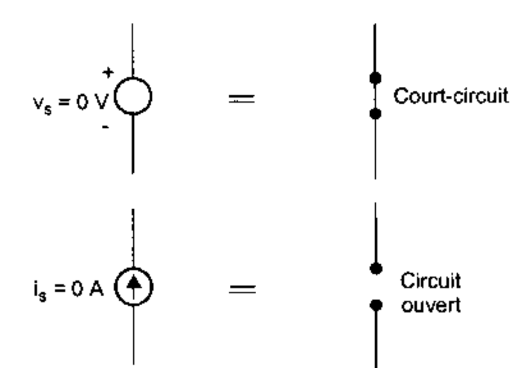


Figure 2-23 Annulation des sources de tension et de courant.

2.4.2 Théorème de Norton

Le circuit équivalent d'un dipôle D est constitué d'une source de courant i_N en parallèle avec une résistance R_N, avec:

i_N = courant en court-circuit du dipôle (courant qui circule dans un court-circuit reliant les deux bornes du dipôle),

R_N = résistance équivalente du dipôle lorsque toutes les sources indépendantes du dipôle sont annulées.

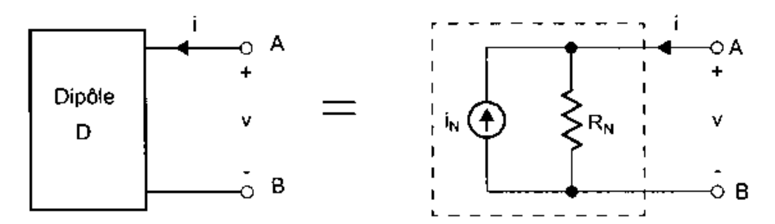


Figure 2-24 Équivalent de Norton.

On peut remarquer que:

- la résistance Thévenin R_T et la résistance Norton R_N sont identiques,
- la source Thévenin et la source Norton sont reliées par: $v_T = R_T i_N$.

Exemple 2-6 Équivalents Thévenin et Norton d'un dipôle

Considérons le dipôle D montré dans la figure 2-25.

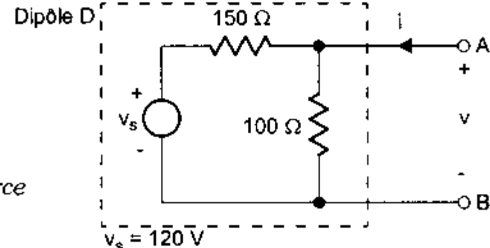


Figure 2-25 Un dipôle contenant une source de tension et des résistances.

Nous allons déterminer les équivalents Thévenin et Norton de ce dipôle en utilisant les définitions données plus haut.

La résistance Thévenin (ou la résistance Norton) du dipôle est la résistance équivalente vue aux bornes AB lorsque toutes les sources indépendantes du dipôle sont annulées:

$$R_T = R_N = (150\Omega \parallel 100\Omega) = 60\Omega .$$

Figure 2-26 La résistance Thévenin est obtenue en annulant toutes les sources du dipôle.

La tension Thévenin est égale à la tension aux bornes AB en circuit ouvert, que l'on peut calculer en utilisant la loi du diviseur de tension:

$$v_T = \frac{100}{(100+150)} v_s = 48\text{V} .$$

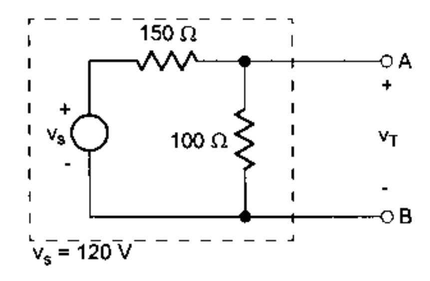


Figure 2-27 La tension Thévenin est la tension aux bornes A-B lorsque le dipôle est en circuit ouvert.

Le courant Norton est égal au courant de court-circuit du dipôle:

$$i_N = \frac{v_s}{150\Omega} = \frac{120}{150} = 0.8\text{A} .$$

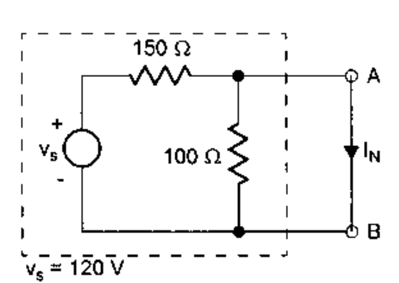


Figure 2-28 Le courant Norton est le courant dans un court-circuit aux bornes A-B.

Les équivalents Thévenin et Norton du dipôle D ainsi obtenus sont montrés dans la figure 2-29.

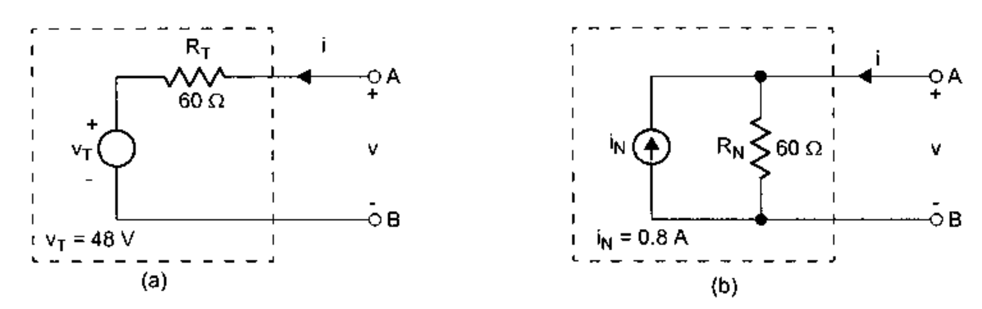


Figure 2-29 Équivalents Thévenin et Norton du dipôle D.
(a) Équivalent Thévenin. (b) Équivalent Norton.

2.5 Transfert maximal de puissance

Dans cette section, on considère le problème d'optimisation du transfert de puissance d'une source vers une charge résistive.

Soit une source qui alimente une charge résistive R_{ch}. On peut représenter la source par son équivalent Thévenin qui comprend une source de tension v_T en série avec une résistance R_T.

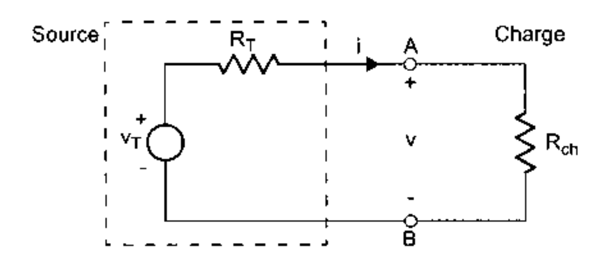


Figure 2-30 Une source qui alimente une charge résistive.

Le courant dans la charge est égale à:

$$i = \frac{v_T}{R_T + R_{ch}} \tag{2-43}$$

La puissance dans la résistance R_{ch} est égale à:

$$P_{ch} = R_{ch} i^2 = R_{ch}\left(\frac{v_T}{R_T + R_{ch}}\right)^2 \tag{2-44}$$

On peut remarquer que cette puissance varie en fonction de la valeur de R_{ch}.

La dérivée de P_{ch} par rapport à R_{ch} est donnée par:

$$\frac{dP_{ch}}{dR_{ch}} = v_T^2 \frac{R_T^2 - R_{ch}^2}{(R_T + R_{ch})^4} \tag{2-45}$$

La puissance dans la charge est maximale lorsque $\frac{dP_{ch}}{dR_{ch}} = 0$, c'est à dire lorsque $R_{ch} = R_T$.

La puissance maximale dans la charge sera:

$$P_{ch}(max) = \frac{V_T^2}{4R_T} \tag{2-46}$$

La figure 2-31 montre la puissance P_{ch} dissipée dans la charge en fonction de la résistance de charge R_{ch}.

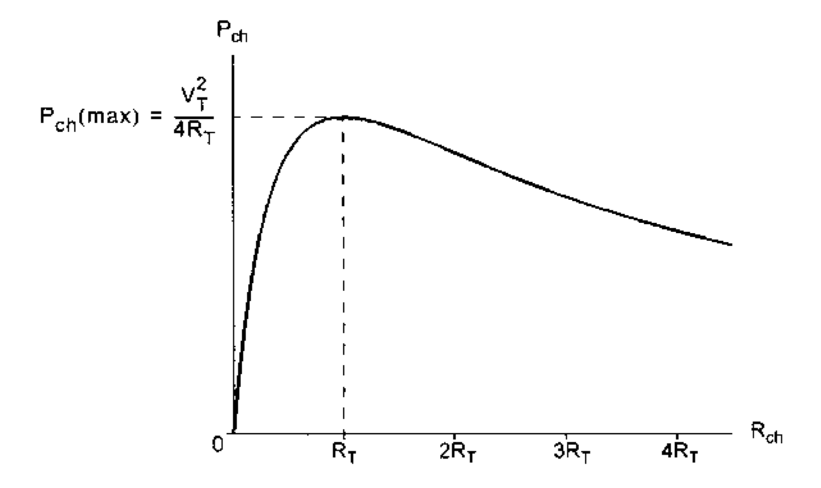


Figure 2-31 La puissance dans R_{ch} en fonction de R_{ch}.

2.6 Linéarité des circuits électriques - Principe de superposition

2.6.1 Définition de système linéaire

Un système effectue une opération sur le *signal d'entrée* x pour donner le *signal de sortie* y.

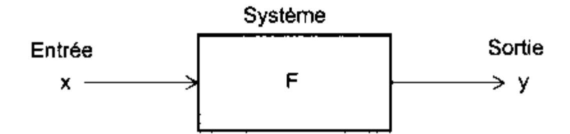


Figure 2-32 Un système est défini par l'opération qu'il effectue sur le signal d'entrée.

Un système est défini par la relation entre la sortie y et l'entrée x:

$$y = F(x) \tag{2-47}$$

Un système est dit *linéaire* si la *relation entre la sortie y et l'entrée x* possède les caractéristiques suivantes:

• Si l'entrée est *multipliée par une constante* a, la sortie sera multipliée par la même constante:

Si $x \Rightarrow y$ **alors** $ax \Rightarrow ay$

• Si l'entrée est *égale à une somme* (x_1+x_2), la sortie sera égale à une somme (y_1+y_2), avec y_1 est la sortie correspondante à x_1, et y_2 est la sortie correspondante à x_2:

Si $x_1 \Rightarrow y_1$ ET $x_2 \Rightarrow y_2$ **alors** $x_1+x_2 \Rightarrow y_1+y_2$

Ces deux caractéristiques peuvent être combinées en une seule qui s'énonce comme suit:

Un système est linéaire si une *combinaison linéaire* de plusieurs fonctions appliquée à l'entrée produira à la sortie la même combinaison linéaire des sorties prises individuellement:

Si $x_1 \Rightarrow y_1$ ET $x_2 \Rightarrow y_2$ **alors** $ax_1+bx_2 \Rightarrow ay_1+by_2$

Exemple d'un système linéaire

Considérons un système dont la relation entre l'entrée la sortie y et l'entrée x est:

$$y = \frac{dx}{dt}$$

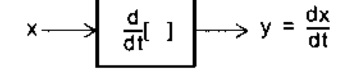


Figure 2-33 Un système linéaire.

Nous vérifions le fonctionnement du système:

$x \Rightarrow \frac{dx}{dt}$ **alors** $ax \Rightarrow \frac{d}{dt}[ax] = a\frac{dx}{dt}$

Nous constatons que si l'entrée est multipliée par une constante «a» la sortie est multipliée par cette même constante.

Continuons avec la deuxième propriété:

$$x_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} \text{ et } x_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt}$$

$$\textbf{alors } (x_1+x_2) \Rightarrow \frac{d}{dt}[x_1 + x_2] = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}$$

Nous constatons que si l'entrée est la somme de x_1 et x_2, la sortie est la somme des deux sorties individuelles $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dx_2}{dt}$.

Donc, ce système est un système linéaire parce qu'il possède les deux propriétés requises.

Exemple d'un système non linéaire

Considérons un système dont la relation entre l'entrée la sortie y et l'entrée x est:

$$y = x^2$$

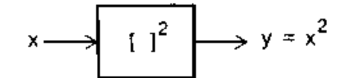


Figure 2-34 Un système non linéaire.

Nous vérifions le fonctionnement du système:

$$x \Rightarrow x^2 \qquad \textbf{alors} \qquad ax \Rightarrow (ax)^2 = a^2x^2 \neq ax^2$$

Nous constatons que si l'entrée est multipliée par une constante «a» la sortie n'est pas multipliée par cette même constante.

Continuons avec la deuxième propriété:

$$x_1 \Rightarrow x_1^2 \text{ et } x_2 \Rightarrow x_2^2$$

$$\textbf{alors} \qquad (x_1+x_2) \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

Nous constatons que si l'entrée est la somme de x_1 et x_2, la sortie n'est pas égale à la somme des sorties individuelles $x_1^2 + x_2^2$.

Donc, ce système n'est pas un système linéaire parce qu'il ne possède pas les deux propriétés requises.

2.6.2 Linéarité des circuits électriques

On peut démontrer que les éléments R, L, C, transformateur idéal, et les sources commandées sont des éléments linéaires.

Résistance: $v = Ri$

- Étant donné $v_1 = Ri_1$ et $v_2 = Ri_2$
- Si $i = ai_1 + bi_2$ alors $v = R(ai_1 + bi_2) = aRi_1 + bRi_2 = av_1 + bv_2$

Inductance: $v = L\frac{di}{dt}$

- Étant donné $v_1 = L\frac{di_1}{dt}$ et $v_2 = L\frac{di_2}{dt}$

- Si $i = ai_1 + bi_2$ alors $v = L\frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) = aL\frac{di_1}{dt} + bL\frac{di_2}{dt} = av_1 + bv_2$

Condensateur: $i = C\frac{dv}{dt}$

- Étant donné $i_1 = C\frac{dv_1}{dt}$ et $i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$

- Si $v = av_1 + bv_2$ alors $i = C\frac{d}{dt}(av_1 + bv_2) = aC\frac{dv_1}{dt} + bC\frac{dv_2}{dt} = ai_1 + bi_2$

Transformateur idéal: $v_p = av_s$ et $i_p = i_s/a$

- Ces relations sont des relations linéaires parce que «a» est une constante.

Sources commandées:

- Dans une source commandée, la relation entre la sortie et l'entrée est linéaire parce que la multiplication par une constante est une opération linéaire.

On peut constater que les circuits électriques qui contiennent seulement des éléments R, L, C, des transformateurs idéals et des sources commandées sont des combinaisons d'éléments linéaires. Les variables dans ces circuits respectent les lois linéaires (lois de Kirchhoff). Par conséquent, ces circuits électriques sont des systèmes linéaires.

2.6.3 Principe de superposition

Le principe de superposition découle directement des propriétés des systèmes linéaires. Pour les circuits électriques linéaires, ce principe s'énonce comme suit.

Lorsqu'un circuit électrique linéaire est excité par plusieurs sources, l'analyse du circuit peut être effectuée en considérant une seule source à la fois, les autres sources étant annulées. La réponse totale sera égale à la somme de toutes les réponses individuelles.

Exemple 2-7 Analyse d'un circuit électrique par la superposition

Soit le circuit montré dans la figure 2-35. On désire calculer la tension v_x aux bornes de la résistance 150 Ω.

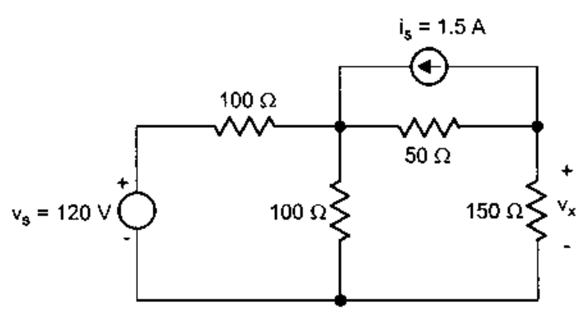


Figure 2-35 Un circuit alimenté par deux sources différentes.

Réponse due à la source v_s seule

On annule la source de courant i_s en la remplaçant par un *circuit ouvert*, comme illustré dans la figure 2-36.

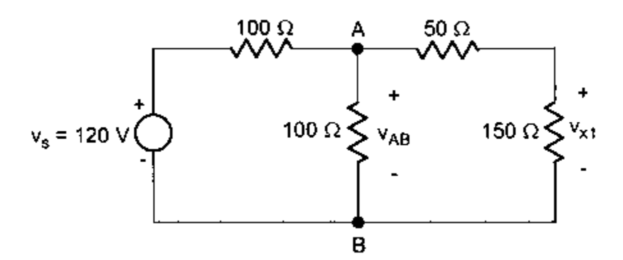


Figure 2-36 Réponse due à la source v_s seule.

On calcule la tension v_{x1} en appliquant successivement deux fois la loi du diviseur de tension:

$$v_{x1} = \frac{150}{(150+50)} \times v_{AB}$$

où: $v_{AB} = \frac{R_{AB}}{(R_{AB}+100)} \times v_s$ avec $R_{AB} = \frac{100(150+50)}{(100+150+50)}\Omega = 66.67\Omega$.

Alors:

$$v_{x1} = \frac{150}{(150+50)} \times \frac{66.67}{(66.67+100)} \times 120V = 36V$$

Réponse due à la source i_s seule

On annule la source de tension v_s en la remplaçant par un *court-circuit*, comme illustré dans la figure 2-37.

La tension v_{x2} est égale à $150i_{x2}$.

On calcule le courant i_{x2} en appliquant la loi du diviseur de courant:

$$i_{x2} = \frac{-50}{[(100 \| 100)+150]+50} \times i_s$$

Alors:

$$v_{x2} = 150 \times \frac{-50}{250} \times 1.5A = -45V$$

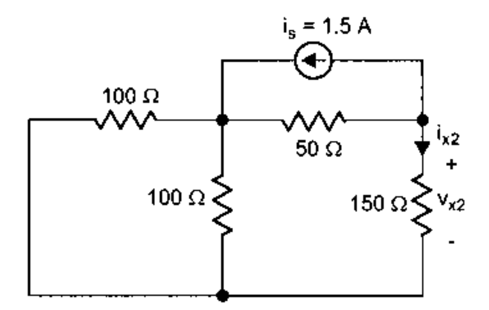


Figure 2-37 Réponse due à la source i_s seule.

Superposition

La tension v_x est égale à la somme des deux tensions v_{x1} et v_{x2} calculées séparément:

$$v_x = v_{x1} + v_{x2} = 36V - 45V = -9V$$

2.7 Analyse des circuits résistifs

Les circuits résistifs sont des circuits qui contiennent seulement des sources et des résistances. De façon générale, on peut appliquer les notions fondamentales des paragraphes précédents (équivalents série et parallèle, équivalents Thévenin et Norton, lois de diviseurs de tension et de courant) pour réduire et simplifier le circuit afin de pouvoir calculer les tensions et courants dans le circuit. Lorsque le circuit est excité par plusieurs sources, on applique le principe de superposition pour séparer le problème complexe en plusieurs problèmes simples.

L'exemple 2-8 illustre cette approche.

Exemple 2-8 Analyse d'un circuit résistif

Considérons un circuit résistif sans sources commandées.

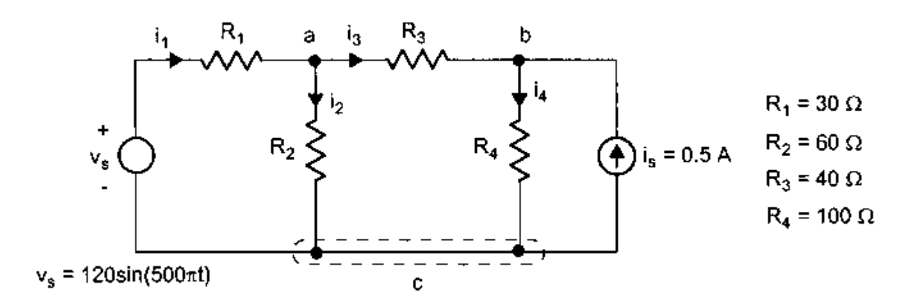


Figure 2-38 Un circuit résistif avec deux sources.

On remplace les parties droite et gauche du circuit par leurs équivalents Thévenin, avec:

$$V_{T1} = \frac{60}{60+30} \times v_s = 80\sin(500\pi t)$$

$$R_{T1} = \frac{30 \times 60}{30+60}\Omega = 20\Omega$$

$$V_{T2} = 100\Omega \times .5A = 50V$$

$$R_{T2} = 100\Omega$$

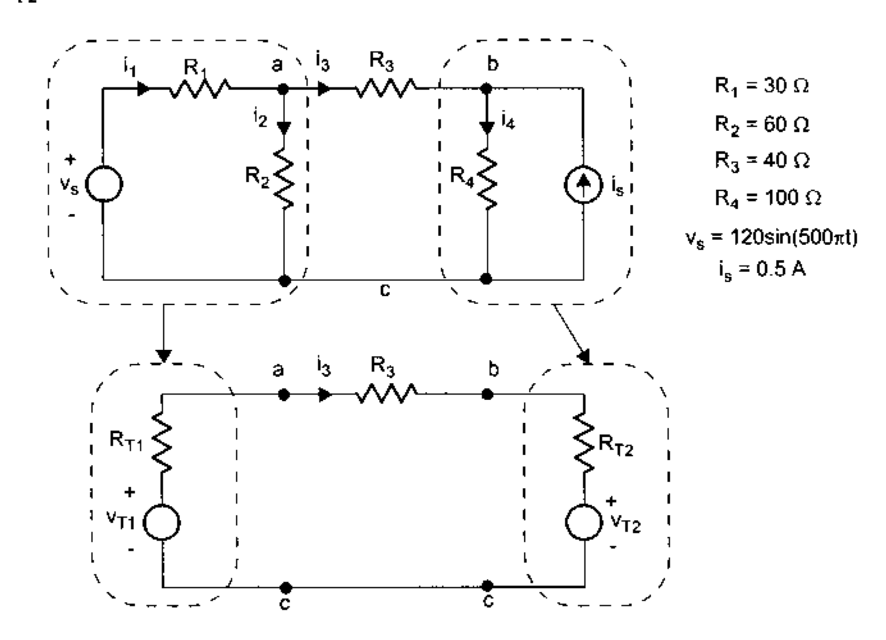


Figure 2-39 Chaque partie du circuit est remplacée par son équivalent Thévenin.

On peut calculer le courant i_3 à partir de ce circuit équivalent simple:

$$i_3 = \frac{v_{T1} - v_{T2}}{R_{T1} + R_3 + R_{T2}} = \frac{80\sin(500\pi t) - 50}{20 + 40 + 100} = 0.5\sin(500\pi t) - 0.3125$$

La tension v_{ac} est égale à:

$$v_{ac} = v_{T1} - R_{T1} i_3 = 80\sin(500\pi t) - 20(0.5\sin(500\pi t) - 0.3125)$$

$$v_{ac} = 70\sin(500\pi t) + 6.25$$

La tension v_{bc} est égale à:

$$v_{bc} = v_{T2} + R_{T2} i_3 = 50 + 100(0.5\sin(500\pi t) - 0.3125)$$

$$v_{bc} = 50\sin(500\pi t) + 18.75$$

Les autres tensions et courants du circuit peuvent être calculés à partir de v_{ac} et v_{bc}. Par exemple:

$$i_1 = \frac{v_s - v_{ac}}{R_1} = \frac{120\sin(500\pi t) - 70\sin(500\pi t) - 6.25}{30} = 1.67\sin(500\pi t) - 0.21 .$$

Exercices

2.1 Soit le circuit montré dans la figure E2.1

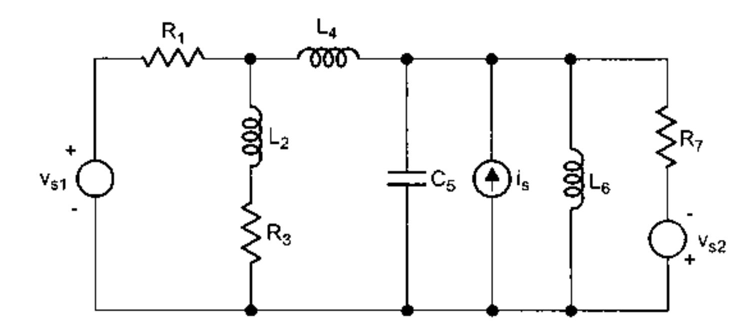


Figure E2.1

a) Identifier les noeuds et les branches du circuit.

b) Identifier les variables tension et courant des éléments.

c) Appliquer la loi des courants de Kirchhoff à tous les noeuds et la loi des tensions de Kirchhoff à quelques parcours fermés du circuit.

2.2 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.2.

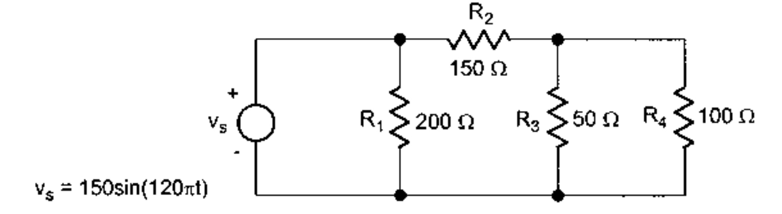


Figure E2.2

a) Déterminer la résistance équivalente vue par la source v_S.

b) Utilisant les lois du diviseur de tension et du diviseur de courant, déterminer les courants et les tensions dans chaque résistance du circuit.

2.3 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.3.

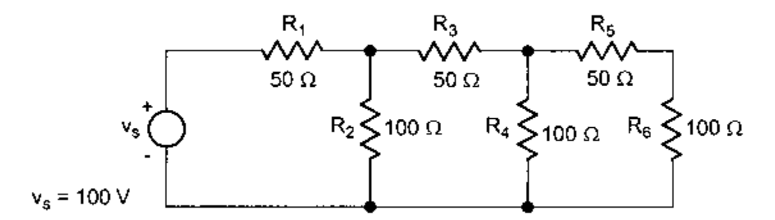


Figure E2.3

a) Déterminer la résistance équivalente vue par la source v_S.

b) Utilisant les lois du diviseur de tension et du diviseur de courant, déterminer les courants et les tensions dans chaque résistance du circuit.

2.4 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.4.

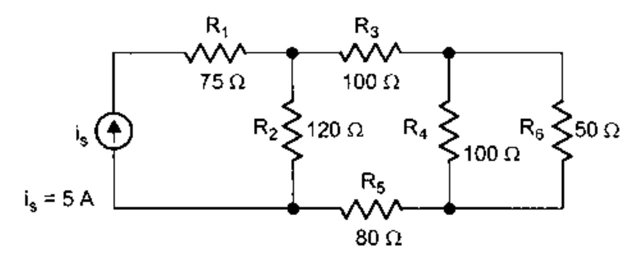


Figure E2.4

a) Déterminer la résistance équivalente vue par la source de courant i_S.

b) Utilisant les lois du diviseur de tension et du diviseur de courant, déterminer les courants et les tensions dans chaque résistance du circuit.

2.5 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.5.

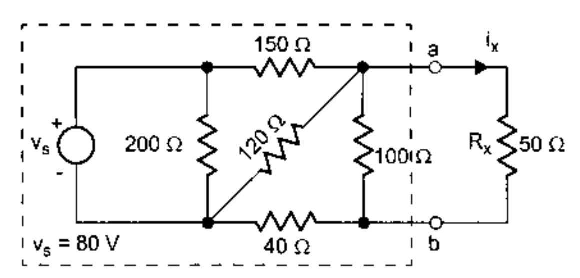


Figure E2.5

a) Déterminer l'équivalent Thévenin de la partie gauche (bornes a-b) du circuit.

b) À l'aide du résultat de a, déterminer le courant i_X.

2.6 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.6.

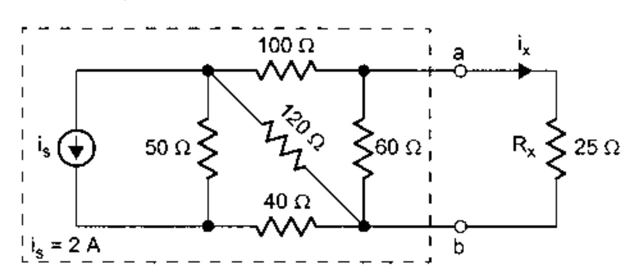


Figure E2.6

a) Déterminer l'équivalent Thévenin de la partie gauche (bornes a-b) du circuit.

b) À l'aide du résultat de a, déterminer le courant i_X.

2.7 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.7.

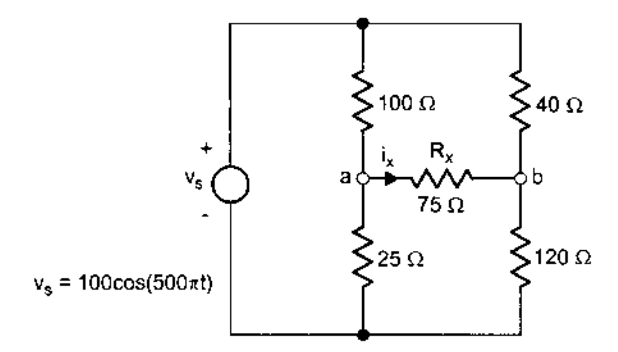


Figure E2.7

a) Déterminer l'équivalent Thévenin vu aux bornes a-b du circuit (sans la résistance R_x).

b) À l'aide du résultat de a, déterminer le courant i_x.

2.8 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.8.

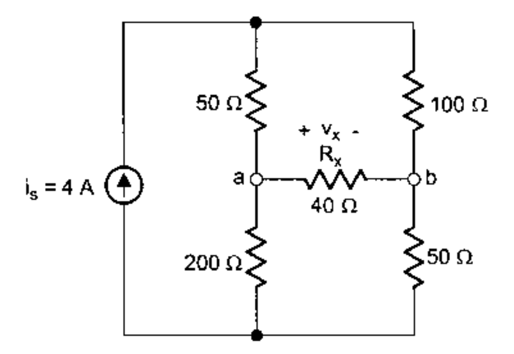


Figure E2.8

a) Déterminer l'équivalent Thévenin vu aux bornes a-b du circuit (sans la résistance R_x).

b) À l'aide du résultat de a, déterminer la tension v_x.

2.9 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.9.

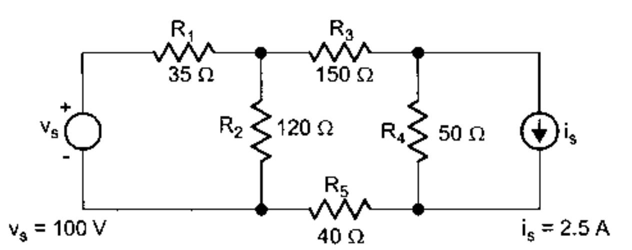


Figure E2.9

a) À l'aide des équivalents Thévenin et Norton, simplifier le circuit. Calculer le courant dans chaque résistance du circuit.

b) Sans simplifier le circuit, calculer le courant dans chaque résistance du circuit en appliquant le principe de superposition.

2.10 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.10.

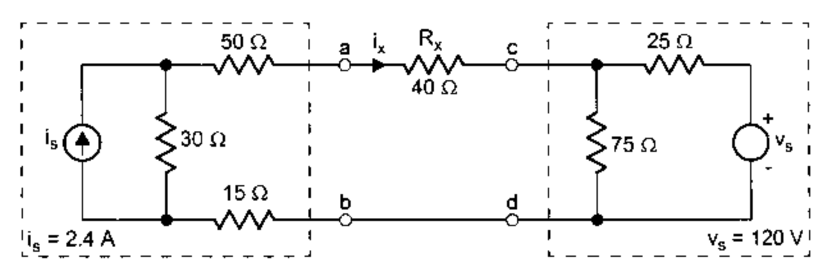


Figure E2.10

a) Déterminer l'équivalent Thévenin de la partie gauche (bornes a-b) du circuit.

b) Déterminer l'équivalent Thévenin de la partie droite (bornes c-d) du circuit.

c) À l'aide des résultats de a et b, déterminer le courant i_x.

d) Sans utiliser l'équivalent Thévenin, calculer le courant i_x en appliquant le principe de superposition.

2.11 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.11.

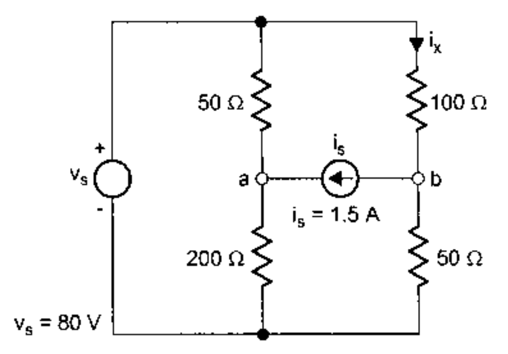


Figure E2.11

Calculer le courant i_x en appliquant le principe de superposition.

2.12 Soit le circuit résistif montré dans la figure E2.12.

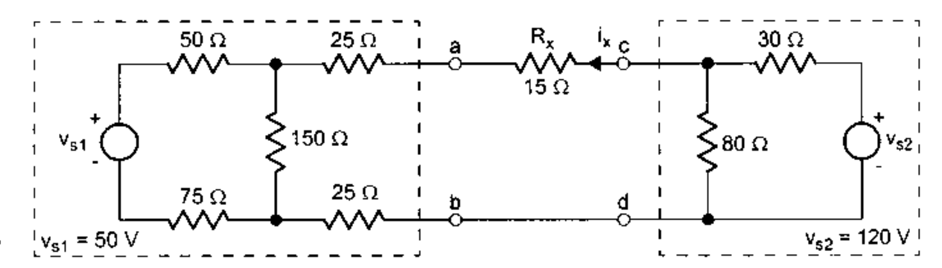


Figure E2.12

a) Déterminer les équivalents Thévenin des parties gauche (bornes a-b) et droite (bornes c-d) du circuit.

b) À l'aide des résultats de a, déterminer le courant i_x.

c) Sans utiliser l'équivalent Thévenin, calculer le courant i_x en appliquant le principe de superposition.

Chapitre 3

FORMULATION DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Dans ce chapitre, les méthodes de formulation des équations d'équilibre des circuits électriques sont présentées et appliquées à des circuits passifs et actifs.

3.1 Topologie des circuits électriques

Un circuit électrique (ou réseau électrique) est l'ensemble des éléments idéaux connectés de façon à constituer le modèle d'un système électrique.

Le *schéma* d'un circuit électrique représente la structure avec laquelle les éléments sont connectés. Les propriétés d'un circuit électrique sont déterminées uniquement par cette structure de connexion que l'on appelle la *topologie* du circuit. Ses propriétés ne sont pas affectées par la modification de dimension et/ou de forme du schéma pourvu que la topologie soit respectée.

Dans l'étude de la topologie des circuits électriques, on utilise le concept de *graphe*. Le graphe d'un circuit est obtenu en remplaçant tous les éléments par des lignes formant ainsi le squelette du circuit.

Les lignes dans un graphe sont les *branches*. Les points de jonction de deux ou plusieurs branches sont les *noeuds*.

On peut définir une direction de référence (du courant) pour chaque branche d'un graphe.

Les parcours fermés qui ne renferment aucun autre sont les *mailles*.

Un *arbre* est un ensemble de branches qui relient tous les noeuds sans former de parcours fermé.

Les *cordes* (ou compléments) sont les branches qui ne font pas partie d'un arbre.

La figure 3-1 montre un exemple de graphe d'un circuit électrique.

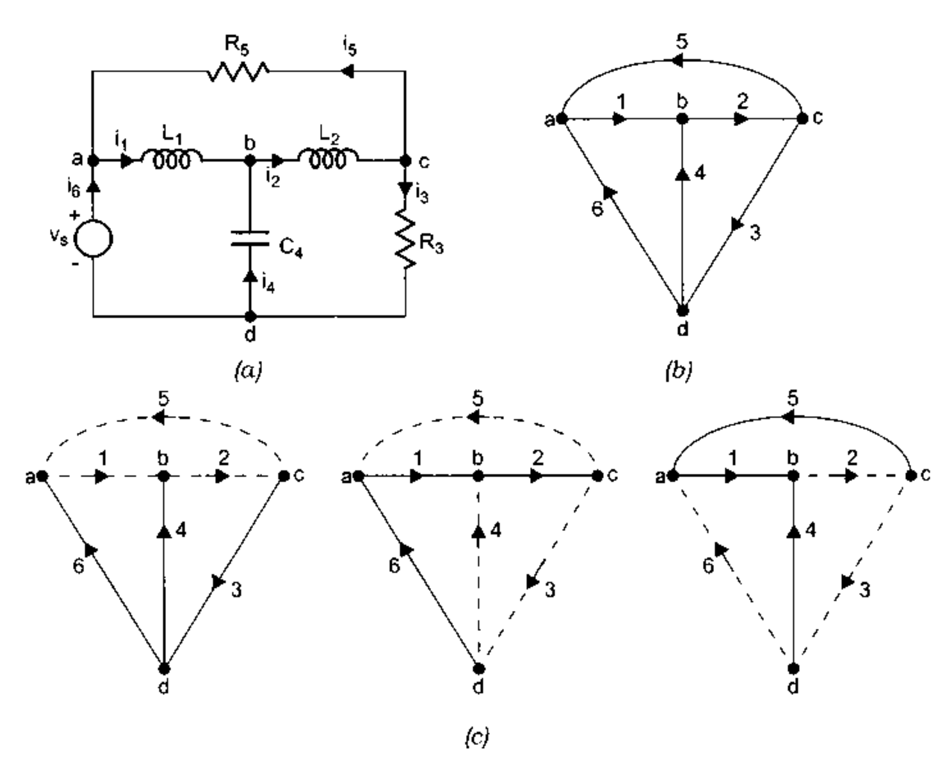


Figure 3-1 Notion de graphe d'un circuit électrique.
(a) Circuit. (b) Graphe. (c) Trois arbres.

3.2 Équations d'équilibre

Les variables «tensions» et «courants» d'un circuit électrique sont reliées par des équations qui décrivent la topologie du circuit et aussi la nature de chacun des éléments. Ces équations sont les <u>équations d'équilibre</u> du circuit et comprennent:

- les *équations de courants* à des noeuds (résultant de la loi des courants de Kirchhoff)
- les *équations de tensions* dans les parcours fermés (résultant de la loi des tensions de Kirchhoff)
- les *relations v-i* des éléments.

Avant d'établir les équations d'équilibre d'un circuit, on doit considérer deux questions importantes:

- Quel est le nombre d'équations à écrire?
- À quels noeuds et dans quels parcours faut-il appliquer les lois de Kirchhoff?

Afin de pouvoir répondre à ces deux questions, on doit considérer en premier lieu le *circuit de base* qui est obtenu par <u>l'annulation de toutes les sources indépendantes</u>.

On peut remarquer qu'une source de tension nulle est équivalente à un court-circuit et une source de courant nulle est équivalente à un circuit ouvert.

$v_s = 0$ V = Court-circuit

$i_s = 0$ A = Circuit ouvert

Figure 3-2 Annulation des sources de tension et de courant.

Dans le circuit de base, posons:

b = nombre de branches,
n = nombre de noeuds,
m = nombre de mailles.

On peut établir la relation suivante entre les paramètres b, n et m:

$$b = m + n - 1 \tag{3-1}$$

Le nombre total de variables du circuit est égal à 2b comprenant b tensions et b courants. Par conséquent, le *nombre total d'équations à écrire* doit être égal à 2b. Ces équations sont:

- b relations v-i pour les b éléments
- b équations de Kirchhoff

Les b équations de Kirchhoff peuvent être établies en utilisant les observations suivantes:

- Si la loi des courants est respectée aux (n-1) noeuds du circuit alors elle sera automatiquement respectée au dernier noeud du circuit.
- Si la loi des tensions est respectée pour les m mailles du circuit alors elle sera automatiquement respectée pour tous les parcours fermés du circuit.

Par conséquent, on doit écrire (n-1) équations de courants aux (n-1) noeuds et m équations de tensions dans les m mailles.

<u>En résumé</u>:

Pour un circuit de **b** branches, **m** mailles, et **n** noeuds, on doit écrire **2b** équations comprenant:

- b relations v-i des b éléments,
- (n-1) équations de courants aux (n-1) noeuds,
- m équations de tensions dans les m mailles.

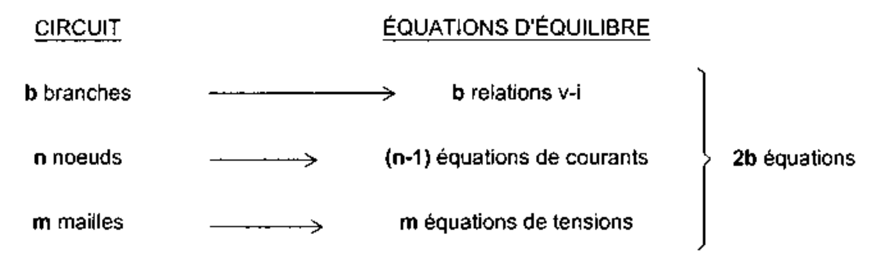


Figure 3-3 Le nombre d'équations à écrire est égal à deux fois le nombre de branches.

En insérant les b relations v-i dans les équations de courants et de tensions, on obtiendra b équations à b inconnues (b tensions *ou* b courants) que l'on doit résoudre.

Exemple 3-1 Équations d'équilibre avec la méthode de base (méthode longue)

Considérons le circuit montré dans la figure 3-4.

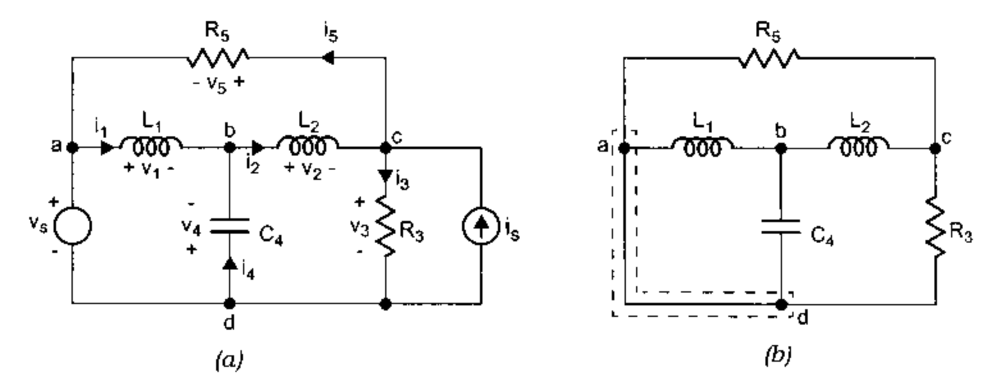


Figure 3-4 Formulation des équations d'équilibre par la méthode de base. (a) Circuit. (b) Circuit de base.

Le circuit de base est obtenu en annulant les deux sources v_s et i_s. À l'aide du circuit de base, on peut identifier:

- nombre de branches b = 5
- nombre de noeuds n = 3
- nombre de mailles m = 3

Les équations d'équilibre du circuit sont:

5 relations v-i
$$\begin{cases} v_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} \\ v_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} \\ v_3 = R_3 i_3 \\ i_4 = C_4\dfrac{dv_4}{dt} \\ v_5 = R_5 i_5 \end{cases}$$

2 équations de courants
$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_4 = 0 & \text{au noeud b} \\ i_2 - i_3 - i_5 = -i_s & \text{au noeud c} \end{cases}$$

3 équations de tensions
$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_5 = 0 & \text{dans la maille abc} \\ v_2 + v_3 + v_4 = 0 & \text{dans la maille bcd} \\ v_1 - v_4 = v_s & \text{dans la maille abd} \end{cases}$$

En insérant les 5 relations v-i des éléments dans les équations de courants et de ten-

sions, on obtiendra un système de 5 équations à 5 inconnues que l'on doit résoudre:

$$\frac{1}{L_1}\int v_1 dt - \frac{1}{L_2}\int v_2 dt + C_4\frac{dv_4}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{L_2}\int v_2 dt - \frac{v_3}{R_3} - \frac{v_5}{R_5} = -i_s$$

$$v_1 + v_2 + v_5 = 0$$

$$v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

$$v_1 - v_4 = v_s$$

Minimisation du nombre d'équations

La méthode de formulation des équations d'équilibre d'un circuit que nous venons de voir est simple et directe. Cependant, le nombre d'équations à écrire (et à résoudre) est grand (égal au nombre de branches du circuit).

Il est possible de réduire le nombre d'équations à écrire pour un circuit donné en choisissant un ensemble de *variables indépendantes* en fonction desquelles les variables du circuit peuvent être exprimées. Les équations d'équilibre du circuit seront établies en fonction de ces variables indépendantes dont le nombre est réduit par rapport au nombre de branches. C'est précisément le principe des deux méthodes que l'on expliquera dans les deux prochains paragraphes: méthode des noeuds et méthodes des mailles.

Dans la *méthode des noeuds*, on choisit un ensemble de *(n-1) tensions indépendantes* et on écrit (n-1) équations de courants aux (n-1) noeuds du circuit. Le nombre d'équations sera donc égal à (n-1).

Dans la *méthode des mailles*, on choisit un ensemble de *m courants indépendants* et on écrit m équations de tensions dans les m mailles du circuit. Le nombre d'équations sera donc égal à m.

Pour minimiser l'effort de calcul, on devrait choisir la méthode qui donne le plus petit nombre d'équations.

3.3 Méthode des noeuds

Considérons le circuit de base montré dans la figure 3-5.

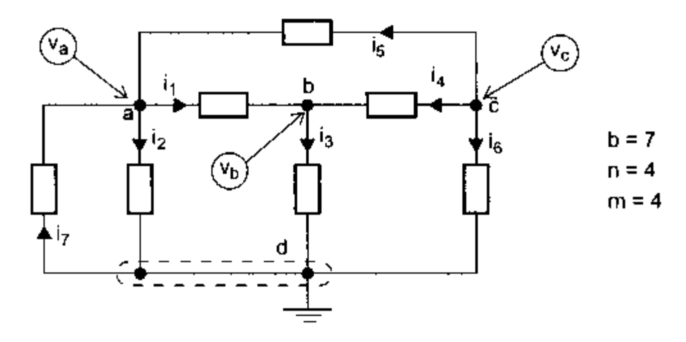


Figure 3-5 Méthode des noeuds: choix des tensions nodales dans le circuit de base.

On choisit un noeud arbitraire comme noeud de référence (noeud d par exemple).

Le potentiel du noeud de référence est considéré nul: $v_d = 0$.

Les tensions entre les autres noeuds et le noeud de référence sont définies comme les *tensions nodales* du circuit:

$$v_a = v_{ad} = v_a - v_d$$

$$v_b = v_{bd} = v_b - v_d$$

$$v_c = v_{cd} = v_c - v_d$$

Les tensions dans les branches du circuit peuvent être exprimées en fonctions des tensions nodales:

$$v_1 = v_a - v_b$$

$$v_2 = v_a$$

$$v_3 = v_b$$

$$v_4 = v_c - v_b$$

$$v_5 = v_c - v_a$$

$$v_6 = v_c$$

$$v_7 = -v_a$$

Ainsi, les *tensions nodales* forment un ensemble de *tensions indépendantes* en fonction desquelles les équations d'équilibre du circuit peuvent être établies. Pour un circuit de n noeuds, le nombre de tensions nodales est égal à (n-1) qui est plus petit que b.

Les inconnues sont les (n-1) tensions nodales. Les équations à écrire sont les (n-1) équations de courants appliquées aux (n-1) noeuds du circuit.

Les étapes de la méthode des noeuds sont:

a. Définir les (n-1) tensions nodales v_a, v_b, v_c, ...

b. Exprimer les tensions dans les branches en fonction des tensions nodales

c. Écrire (n-1) équations de courants pour les (n-1) noeuds

d. Insérer les relations v-i des éléments et les équations de l'étape b dans les équations de courants de l'étape c

On obtient ainsi un ensemble de (n-1) équations avec (n-1) inconnues qui sont les (n-1) tensions nodales.

Exemple 3-2 Équations d'équilibre d'un circuit résistif avec la méthode des noeuds

Considérons le circuit résistif montré dans la figure 3-6.

Nous utilisons la méthode des noeuds pour établir les équations d'équilibre du circuit.

- À l'aide du circuit de base, on détermine 5 branches, 3 noeuds et 3 mailles. On choisit le noeud c comme noeud de référence.

- On définit les deux tensions nodales v_a et v_b.

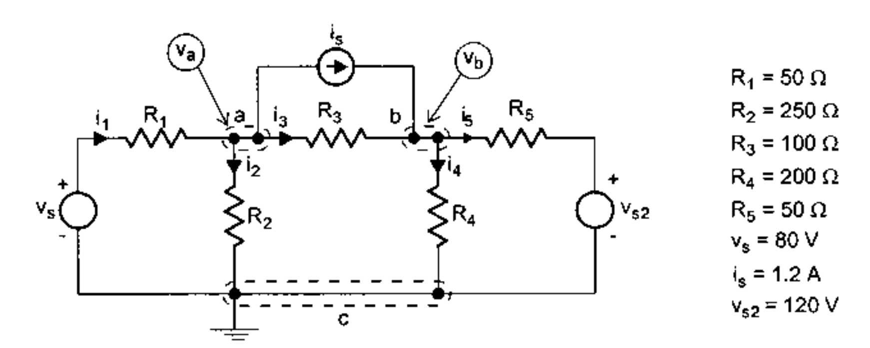


Figure 3-6 Méthode des noeuds appliquée à un circuit résistif.

- On exprime les tensions dans les branches en fonction des tensions nodales:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_s - v_a \\ v_2 &= v_a \\ v_3 &= v_a - v_b \\ v_4 &= v_b \\ v_5 &= v_b - v_{s2} \end{aligned} \tag{3-2}$$

- On écrit les *équations de courants* aux noeuds a et b:

$$i_1 - i_2 - i_3 = i_s \qquad \text{au noeud a} \tag{3-3}$$

$$i_3 - i_4 - i_5 = -i_s \qquad \text{au noeud b} \tag{3-4}$$

- On écrit les relations v-i des éléments:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} \qquad i_2 = \frac{v_2}{R_2} \qquad i_3 = \frac{v_3}{R_3} \qquad i_4 = \frac{v_4}{R_4} \qquad i_5 = \frac{v_5}{R_5}$$

- On remplace ces relations v-i dans les équations de courants:

$$\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = i_s \tag{3-5}$$

$$\frac{v_3}{R_3} - \frac{v_4}{R_4} - \frac{v_5}{R_5} = -i_s \tag{3-6}$$

- On remplace les relations (3-2) dans les équations (3-5) et (3-6):

$$\frac{v_s - v_a}{R_1} - \frac{v_a}{R_2} - \frac{v_a - v_b}{R_3} = i_s \tag{3-7}$$

$$\frac{v_a - v_b}{R_3} - \frac{v_b}{R_4} - \frac{v_b - v_{s2}}{R_5} = -i_s \tag{3-8}$$

Ces deux dernières équations constituent les équations d'équilibre du circuit. Elles peuvent être exprimées sous la forme suivante:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)v_a - \left(\frac{1}{R_3}\right)v_b = \frac{v_s}{R_1} - i_s \tag{3-9}$$

$$-\left(\frac{1}{R_3}\right)v_a+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_b = \frac{v_{s2}}{R_5}+i_s \qquad (3\text{-}10)$$

Ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_a\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{v_s}{R_1}-i_s\\ \frac{v_{s2}}{R_5}+i_s\end{bmatrix} \qquad (3\text{-}11)$$

Avec les valeurs numériques, cette équation devient:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{50}+\frac{1}{250}+\frac{1}{100} & -\frac{1}{100}\\ -\frac{1}{100} & \frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{50}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_a\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.6-1.2\\ 2.4+1.2\end{bmatrix} \qquad (3\text{-}12)$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix}0.034 & -0.01\\ -0.01 & 0.035\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_a\\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4\\ 3.6\end{bmatrix} \qquad (3\text{-}13)$$

En résolvant pour v_a et v_b, on obtient:

$$v_a = \frac{\begin{vmatrix}0.4 & -0.01\\ 3.6 & 0.035\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.034 & -0.01\\ -0.01 & 0.035\end{vmatrix}} = 45.87\text{V} \qquad v_b = \frac{\begin{vmatrix}0.034 & 0.4\\ -0.01 & 3.6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.034 & -0.01\\ -0.01 & 0.035\end{vmatrix}} = 115.96\text{V}$$

Les tensions aux bornes des éléments du circuit sont calculées à partir de v_a et v_b à l'aide des relations (3-2).

Les courants dans les éléments du circuit sont calculés à partir de v_a et v_b:

$$i_1 = \frac{v_s - v_a}{R_1} = \frac{80-45.87}{50} = 0.683\text{A}$$

$$i_2 = \frac{v_a}{R_2} = \frac{45.87}{250} = 0.183\text{A}$$

$$i_3 = \frac{v_a - v_b}{R_3} = \frac{45.87-115.96}{100} = -0.701\text{A}$$

$$i_4 = \frac{v_b}{R_4} = \frac{115.96}{200} = 0.580\text{A}$$

$$i_5 = \frac{v_b - v_{s2}}{R_5} = \frac{115.96-120}{50} = -0.081\text{A}$$

Exemple 3-3 **Équations d'équilibre d'un circuit général par la méthode des noeuds**

Considérons le circuit montré dans la figure 3-7.

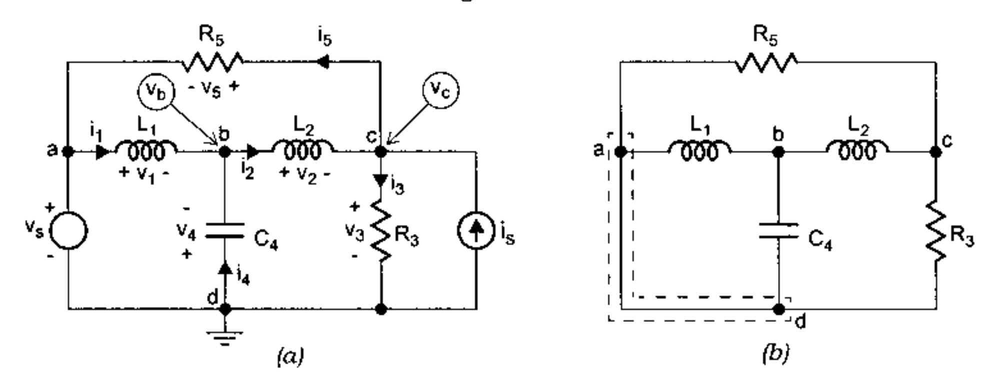


Figure 3-7 Établissement des équations d'équilibre par la méthode des noeuds. (a) Circuit: choix des tensions nodales. (b) Circuit de base.

- À l'aide du circuit de base, on détermine 5 branches, 3 noeuds et 3 mailles. On choisit le noeud d comme noeud de référence.
- On définit les *deux tensions nodales* v_b et v_c.
- On exprime les tensions dans les branches en fonction des tensions nodales:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_s - v_b \\ v_2 &= v_b - v_c \\ v_3 &= v_c \\ v_4 &= -v_b \\ v_5 &= v_c - v_s \end{aligned} \tag{3-14}$$

- On écrit les équations de courants aux noeuds b et c:

$$i_1 - i_2 + i_4 = 0 \qquad \text{au noeud b} \tag{3-15}$$

$$i_2 - i_3 - i_5 = -i_s \qquad \text{au noeud c} \tag{3-16}$$

- On écrit les relations v-i des éléments:

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int v_1 dt \qquad i_2 = \frac{1}{L_2}\int v_2 dt \qquad i_3 = \frac{v_3}{R_3} \qquad i_4 = C_4\frac{dv_4}{dt} \qquad i_5 = \frac{v_5}{R_5}$$

- On remplace les relations v-i dans les équations de courants:

$$\frac{1}{L_1}\int v_1 dt - \frac{1}{L_2}\int v_2 dt + C\frac{dv_4}{dt} = 0 \tag{3-17}$$

$$\frac{1}{L_2}\int v_2 dt - \frac{v_3}{R_3} - \frac{v_5}{R_5} = -i_s \tag{3-18}$$

- On remplace les relations (3-14) dans les équations (3-17) et (3-18):

$$\frac{1}{L_1}\int(v_s - v_b)dt - \frac{1}{L_2}\int(v_b - v_c)dt - C_4\frac{dv_b}{dt} = 0 \qquad (3\text{-}19)$$

$$\frac{1}{L_2}\int(v_b - v_c)dt - \frac{v_c}{R_3} - \frac{(v_c - v_s)}{R_5} = -i_s \qquad (3\text{-}20)$$

Ces deux dernières équations constituent les équations d'équilibre du circuit. Elles peuvent être exprimées sous la forme suivante:

$$\frac{1}{L_1}\int v_b dt + \frac{1}{L_2}\int v_b dt + C_4\frac{dv_b}{dt} - \frac{1}{L_2}\int v_c dt = \frac{1}{L_1}\int v_s dt \qquad (3\text{-}21)$$

$$-\frac{1}{L_2}\int v_b dt + \frac{1}{L_2}\int v_c dt + \frac{v_c}{R_3} + \frac{v_c}{R_5} = i_s + \frac{v_s}{R_5} \qquad (3\text{-}22)$$

Interprétation des équations nodales

Les équations nodales sont les équations de courants écrites à l'aide de la loi de courants de Kirchhoff. La signification de chacun des termes des équations (3-21) et (3-22) est indiquée dans la figure 3-8.

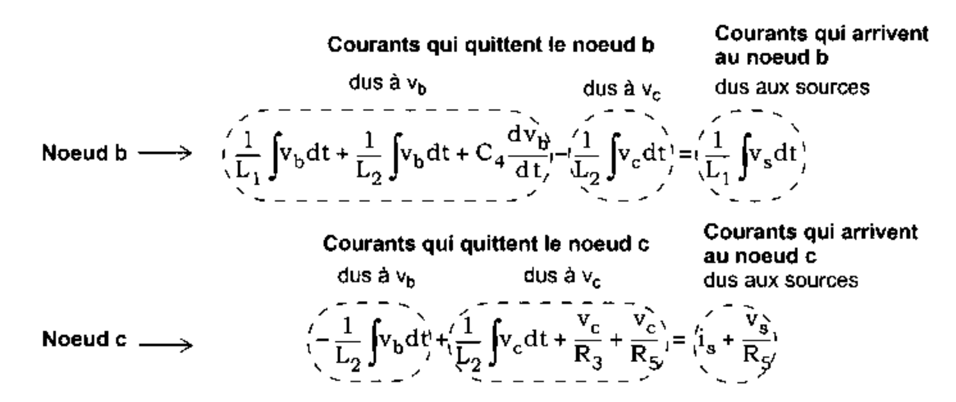


Figure 3-8 Signification des termes des équations d'équilibre obtenues par la méthode des noeuds pour le circuit de la figure 3-7.

Les équations d'équilibre (3-21) et (3-22) peuvent être écrites sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}\int dt + \frac{1}{L_2}\int dt + C_4\frac{d}{dt} & -\frac{1}{L_2}\int dt \\ -\frac{1}{L_2}\int dt & \frac{1}{L_2}\int dt + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}\int v_s dt \\ i_s + \frac{v_s}{R_5} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}23)$$

Dans cette équation, $\frac{d}{dt}$ et $\int dt$ sont les opérateurs «Dérivée» et «Intégrale» que l'on peut représenter par «s» et« $\frac{1}{s}$ » respectivement. L'équation (3-23) peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + C_4 s & -\frac{1}{L_2 s} \\ -\frac{1}{L_2 s} & \frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 s} v_s \\ i_s + \frac{v_s}{R_5} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}24)$$

Interprétation de la forme matricielle des équations nodales

Les équations d'équilibre obtenues avec la méthode des noeuds sont les équations de courants écrites aux (n-1) noeuds du circuit. Elles peuvent être exprimées sous forme matricielle:

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I} \quad (3\text{-}25)$$

où **V** = vecteur des tensions nodales, dimension (n-1) x 1

I = vecteur des courants qui arrivent aux noeuds, dus aux sources, dimension (n-1) x 1

Y = matrice carrée, dimension (n-1) x (n-1)

La matrice **Y** est appelée *matrice d'admittance* du circuit.

La matrice **Y** est symétrique. Les éléments dans la diagonale sont positifs. Les autres éléments (hors diagonale) sont négatifs.

Interprétation de la forme matricielle des équations nodales d'un circuit résistif

Les équations d'équilibre obtenues avec la méthode des noeuds sont les équations de courants écrites aux (n-1) noeuds du circuit. Pour un circuit résistif, ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle:

$$\mathbf{GV} = \mathbf{I} \quad (3\text{-}26)$$

où **V** = vecteur des tensions nodales, dimension (n-1) x 1

I = vecteur des courants qui arrivent aux noeuds, dus aux sources, dimension (n-1) x 1

G = matrice carrée, dimension (n-1) x (n-1)

La matrice G est appelée *matrice de conductance* du circuit.

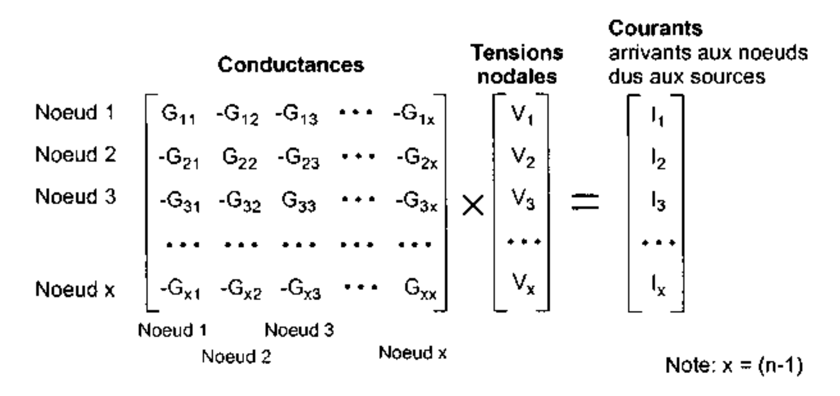


Figure 3-9 Signification des éléments des équations d'équilibre obtenues par la méthode des noeuds pour un circuit résistif.

- La matrice G est symétrique.
- Les éléments dans la diagonale de la matrice G sont positifs:

  G_{11} = somme de toutes les conductances reliées au noeud 1
  G_{22} = somme de toutes les conductances reliées au noeud 2
  G_{33} = somme de toutes les conductances reliées au noeud 3
  . . . . .
  G_{xx} = somme de toutes les conductances reliées au noeud x.
- Les autres éléments (hors diagonale) de la matrice G sont négatifs:

  G_{12} = somme de toutes les conductances reliant noeud 1 au noeud 2
  G_{13} = somme de toutes les conductances reliant noeud 1 au noeud 3
  . . . . .
  G_{1x} = somme de toutes les conductances reliant noeud 1 au noeud x
  G_{23} = somme de toutes les conductances reliant noeud 2 au noeud 3
  G_{24} = somme de toutes les conductances reliant noeud 2 au noeud 4
  . . . . .
  G_{2x} = somme de toutes les conductances reliant noeud 2 au noeud x
  . . . . .
- Les éléments du vecteur **I** sont les courants qui *arrivent* aux noeuds, dus aux sources:

  I_1 = somme de tous les courants qui arrivent au noeud 1, dus aux sources
  I_2 = somme de tous les courants qui arrivent au noeud 2, dus aux sources
  . . . . .
  I_x = somme de tous les courants qui arrivent au noeud x, dus aux sources

3.4 Méthode des mailles

Considérons le circuit de base montré dans la figure 3-10.

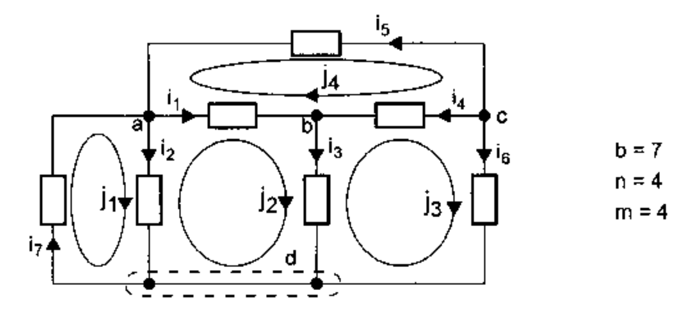


Figure 3-10 Méthode des mailles: définition des courants circulatoires dans le circuit de base.

On imagine quatre courants j_1, j_2, j_3, et j_4 qui circulent uniquement dans chacune des quatre mailles du circuit. Ces courants sont définis comme les *courants circulatoires* du circuit.

Les courants dans les branches du circuit peuvent être exprimés en fonctions des courants circulatoires:

$i_1 = j_2 - j_4$

$i_2 = j_1 - j_2$

$i_3 = j_2 - j_3$

$i_4 = j_4 - j_3$

$i_5 = -j_4$

$i_6 = j_3$

$i_7 = j_1$

Ainsi, les courants circulatoires forment un ensemble de *courants indépendants* en fonction desquels les équations d'équilibre du circuit peuvent être établies. Pour un circuit de m mailles, le nombre de courants circulatoires est égal à m qui est plus petit que b.

Les inconnues sont les m courants circulatoires. Les équations à écrire sont les m équations de tensions appliquées aux m mailles du circuit.

Les étapes de la méthode des mailles sont:

a. Définir les m courants circulatoires $j_1, j_2, j_3, \ldots$

b. Exprimer les courants dans les branches en fonction des courants circulatoires

c. Écrire m équations de tensions pour les m mailles

d. Insérer les relations v-i des éléments et les équations de l'étape b dans les équations de tensions de l'étape c

On obtient ainsi un ensemble de m équations avec m inconnues qui sont les m courants circulatoires.

Exemple 3-4 Équations d'équilibre d'un circuit résistif par la méthode des mailles

Nous allons analyser le même circuit que l'exemple 3-2 avec la méthode des mailles.

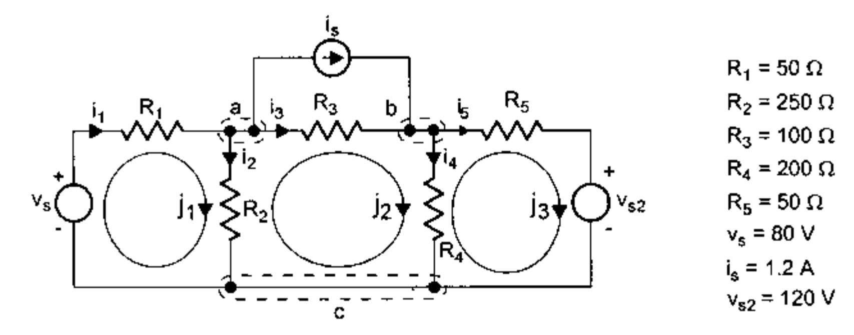


Figure 3-11 Méthode des mailles appliquée à un circuit résistif.

- À l'aide du circuit de base, on détermine 5 branches, 3 noeuds et 3 mailles.
- On définit les trois courants circulatoires j_1, j_2, et j_3.
- On exprime les courants dans les 5 branches en fonction des 2 courants circulatoires:

$$\begin{aligned} i_1 &= j_1 \\ i_2 &= j_1 - j_2 \\ i_3 &= j_2 - i_s \\ i_4 &= j_2 - j_3 \\ i_5 &= j_3 \end{aligned} \qquad (3\text{-}27)$$

- On écrit les équations de tensions dans les mailles 1, 2, et 3:

$$v_1 + v_2 = v_s \qquad \text{dans maille 1} \qquad (3\text{-}28)$$

$$v_3 + v_4 - v_2 = 0 \qquad \text{dans maille 2} \qquad (3\text{-}29)$$

$$v_5 - v_4 = -v_{s2} \qquad \text{dans maille 3} \qquad (3\text{-}30)$$

- On écrit les relations v-i des éléments:

$$v_1 = R_1 i_1 \qquad v_2 = R_2 i_2 \qquad v_3 = R_3 i_3 \qquad v_4 = R_4 i_4 \qquad v_5 = R_5 i_5$$

- On remplace les relations v-i dans les équations de tensions:

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = v_s \qquad (3\text{-}31)$$

$$R_3 i_3 + R_4 i_4 - R_2 i_2 = 0 \qquad (3\text{-}32)$$

$$R_5 i_5 - R_4 i_4 = -v_{s2} \qquad (3\text{-}33)$$

- On remplace les relations (3-27) dans les équations (3-31), (3-32) et (3-33):

$$R_1 j_1 + R_2(j_1 - j_2) = v_s \qquad (3\text{-}34)$$

$$R_3(j_2 - i_s) + R_4(j_2 - j_3) - R_2(j_1 - j_2) = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

$$R_5 j_3 - R_4(j_2 - j_3) = -v_{s2} \qquad (3\text{-}36)$$

Ces trois dernières équations constituent les équations d'équilibre du circuit. Elles peuvent être exprimées sous la forme suivante:

$$(R_1 + R_2)j_1 - R_2 j_2 = v_s \qquad (3\text{-}37)$$

$$-R_2 j_1 + (R_2 + R_3 + R_4)j_2 - R_4 j_3 = R_3 i_s \qquad (3\text{-}38)$$

$$-R_4 j_2 + (R_4 + R_5)j_3 = -v_{s2} \qquad (3\text{-}39)$$

Ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ R_3 i_s \\ -v_{s2} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}40)$$

Avec les valeurs numériques, cette équation devient:

$$\begin{bmatrix} 50 + 250 & -250 & 0 \\ -250 & 250 + 100 + 200 & -200 \\ 0 & -200 & 200 + 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \times 1.2 \\ -120 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}41)$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix} 300 & -250 & 0 \\ -250 & 550 & -200 \\ 0 & -200 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ -120 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}42)$$

En résolvant cette équation matricielle, on obtient:

$j_1 = 0.683$ A $\quad j_2 = 0.499$ A $\quad j_3 = -0.081$ A

Les tensions et courants du circuit peuvent être calculés à partir des courants circulatoires j_1, j_2 et j_3.

Par exemple:

$$v_{ac} = R_2 i_2 = R_2(j_1 - j_2) = 250(0.683 - 0.499) = 46 \text{ V}$$

$$v_{bc} = R_4 i_4 = R_4(j_2 - j_3) = 200(0.499 + 0.081) = 116 \text{ V}$$

Exemple 3-5 Équations d'équilibre d'un circuit général par la méthode des mailles

Considérons le circuit montré dans la figure 3-12.

- À l'aide du circuit de base, on détermine 5 branches, 3 noeuds et 3 mailles.
- On définit les trois courants circulatoires j_1, j_2, et j_3.

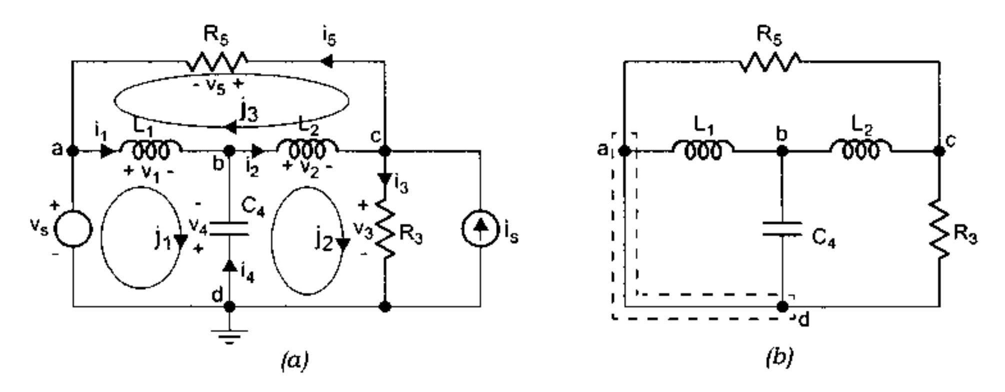


Figure 3-12 Formulation des équations d'équilibre par la méthode des mailles. (a) Circuit: définition des courants circulatoires. (b) Circuit de base.

- On exprime les courants dans les 5 branches en fonction des 2 courants circulatoires:

$$\begin{aligned} i_1 &= j_1 - j_3 \\ i_2 &= j_2 - j_3 \\ i_3 &= j_2 \\ i_4 &= j_2 - j_1 \\ i_5 &= -j_3 \end{aligned} \quad (3\text{-}43)$$

- On écrit les équations de tensions dans les mailles 1, 2, et 3:

$$v_1 - v_4 = v_s \qquad \text{dans maille 1} \quad (3\text{-}44)$$

$$v_2 + v_3 + v_4 = 0 \qquad \text{dans maille 2} \tag{3-45}$$

$$v_1 + v_2 + v_5 = 0 \qquad \text{dans maille 3} \tag{3-46}$$

- On écrit les relations v-i des éléments:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \qquad v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} \qquad v_3 = R_3i_3 \qquad v_4 = \frac{1}{C_4}\int i_4dt \qquad v_5 = R_5i_5$$

- On remplace les relations v-i dans les équations de tensions:

$$L_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_4}\int i_4dt = v_s \tag{3-47}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_3i_3 + \frac{1}{C_4}\int i_4dt = -R_3i_s \tag{3-48}$$

$$L_1\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + R_5i_5 = 0 \tag{3-49}$$

- On remplace les relations (3-43) dans les équations (3-47), (3-48) et (3-49):

$$L_1\frac{d}{dt}(j_1 - j_3) - \frac{1}{C_4}\int (j_2 - j_1)dt = v_s \tag{3-50}$$

$$L_2\frac{d}{dt}(j_2 - j_3) + R_3j_2 + \frac{1}{C_4}\int (j_2 - j_1)dt = -R_3i_s \tag{3-51}$$

$$L_1\frac{d}{dt}(j_1 - j_3) + L_2\frac{d}{dt}(j_2 - j_3) + R_5(-j_3) = 0 \tag{3-52}$$

Ces trois dernières équations constituent les équations d'équilibre du circuit. Elles peuvent être exprimées sous la forme suivante:

$$L_1\frac{dj_1}{dt} + \frac{1}{C_4}\int j_1dt - \frac{1}{C_4}\int j_2dt - L_1\frac{dj_3}{dt} = v_s \tag{3-53}$$

$$-\frac{1}{C_4}\int j_1dt + L_2\frac{dj_2}{dt} + R_3j_2 + \frac{1}{C_4}\int j_2dt - L_2\frac{dj_2}{dt} = -R_3i_s \tag{3-54}$$

$$-L_1\frac{dj_1}{dt} - L_2\frac{dj_2}{dt} + L_1\frac{dj_3}{dt} + L_2\frac{dj_3}{dt} + R_5j_3 = 0 \tag{3-55}$$

Interprétation des équations de mailles

Les équations de mailles sont les équations de tensions écrites à l'aide de la loi de tensions de Kirchhoff. La signification de chacun des termes des équations (3-53), (3-54) et (3-55) est indiquée dans la figure 3-13.

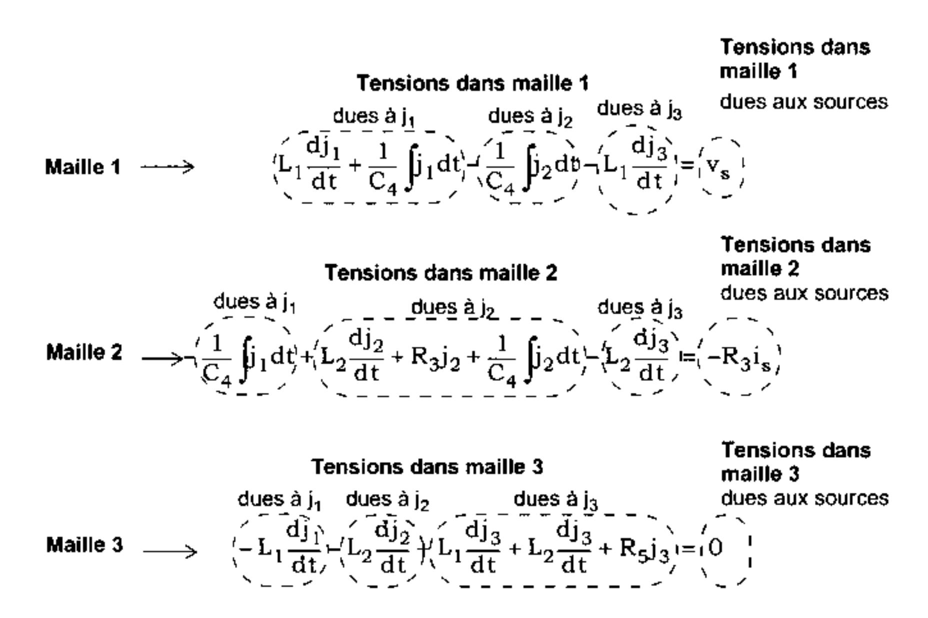


Figure 3-13 Signification des termes des équations d'équilibre obtenues par la méthode des mailles pour le circuit de la figure 3-12.

Les équations d'équilibre (3-53), (3-54) et (3-55) peuvent être écrites sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} L_1\frac{d}{dt}+\frac{1}{C_4}\int dt & -\frac{1}{C_4}\int dt & -L_1\frac{d}{dt} \\ -\frac{1}{C_4}\int dt & L_2\frac{d}{dt}+R_3+\frac{1}{C_4}\int dt & -L_2\frac{d}{dt} \\ -L_1\frac{d}{dt} & -L_2\frac{d}{dt} & L_1\frac{d}{dt}+L_2\frac{d}{dt}+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ -R_3i_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}56)$$

Dans cette équation, $\frac{d}{dt}$ et $\int dt$ sont les opérateurs «Dérivée» et «Intégrale» que l'on peut représenter par «s» et «$\frac{1}{s}$» respectivement. L'équation (3-56) peut alors s'écrire sous forme:

$$\begin{bmatrix} L_1s+\frac{1}{C_4s} & -\frac{1}{C_4s} & -L_1s \\ -\frac{1}{C_4s} & L_2s+R_3+\frac{1}{C_4s} & -L_2s \\ -L_1s & -L_2s & L_1s+L_2s+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ -R_3i_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}57)$$

Interprétation de la forme matricielle des équations de mailles

Les équations d'équilibre obtenues avec la méthode des mailles sont les équations de tensions écrites pour les m mailles du circuit. Elles peuvent être exprimées sous forme

matricielle:

$$\mathbf{ZJ} = \mathbf{V} \tag{3-58}$$

où **J** = vecteur des courants circulatoires, dimension m x 1

V = vecteur des tensions dans les mailles, dues aux sources, dimension m x 1

Z = matrice carrée, dimension m x m

La matrice **Z** est appelée *matrice d'impédance* du circuit.

La matrice **Z** est symétrique. Les éléments dans la diagonale sont positifs. Les autres éléments (hors diagonale) sont négatifs.

Interprétation de la forme matricielle des équations de mailles d'un circuit résistif

Les équations d'équilibre obtenues avec la méthode des mailles sont les équations de tension écrites pour les m mailles du circuit. Pour un circuit résistif, ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle:

$$\mathbf{RI} = \mathbf{V} \tag{3-59}$$

où **I** = vecteur des courants circulatoires, dimension m x 1

V = vecteur des tensions dans les mailles, dues aux sources, dimension m x 1

R = matrice carrée, dimension m x m

La matrice **R** est appelée *matrice de résistance* du circuit.

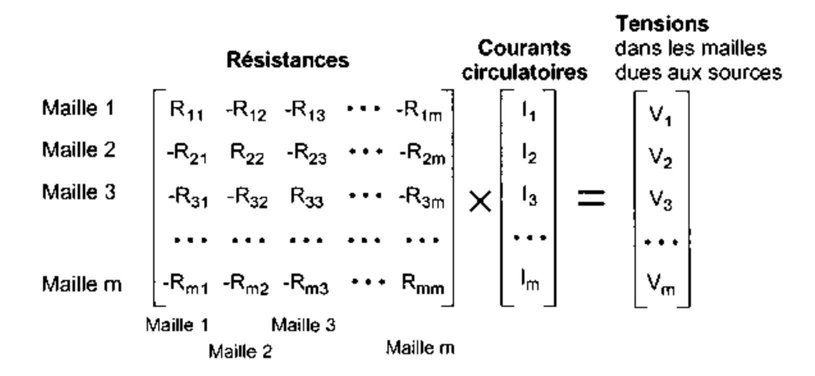


Figure 3-14 Signification des éléments des équations d'équilibre obtenues par la méthode des mailles pour un circuit résistif.

- La matrice **R** est symétrique
- Les éléments dans la diagonale de la matrice **R** sont positifs:

  R_{11} = somme de toutes les résistances dans maille 1

  R_{22} = somme de toutes les résistances dans maille 2

  R_{33} = somme de toutes les résistances dans maille 3

  . . . . .

  R_{mm} = somme de toutes les résistances dans maille m.
- Les autres éléments (hors diagonale) de la matrice **R** sont négatifs:

  R_{12} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 1 et 2

  R_{13} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 1 et 3

. . . . .

R_{1m} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 1 et m

R_{23} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 2 et 3

R_{24} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 2 et 4

. . . . .

R_{2m} = somme de toutes les résistances communes aux mailles 2 et m

. . . . .

- Les éléments du vecteur **V** sont les tensions dans les mailles, dues aux sources:

  V_1 = somme de toutes les tensions dans maille 1, dues aux sources

  V_2 = somme de toutes les tensions dans maille 2, dues aux sources

  . . . . .

  V_m = somme de toutes les tensions dans maille m, dues aux sources

3.5 Équations d'équilibre des circuits avec sources commandées

La formulation des équations d'équilibre d'un circuit contenant des sources commandées peut être effectuée en deux étapes:

a) Dans la première étape, les équations d'équilibre sont établies en considérant que toutes les sources du circuit sont indépendantes,

b) Dans la suite, les relations qui définissent les sources commandées sont insérées dans les équations obtenues dans l'étape a.

Exemple 3-6 Équations d'équilibre d'un circuit résistif avec une source commandée

Soit un circuit résistif avec une source commandée montrée dans la figure 3-15.

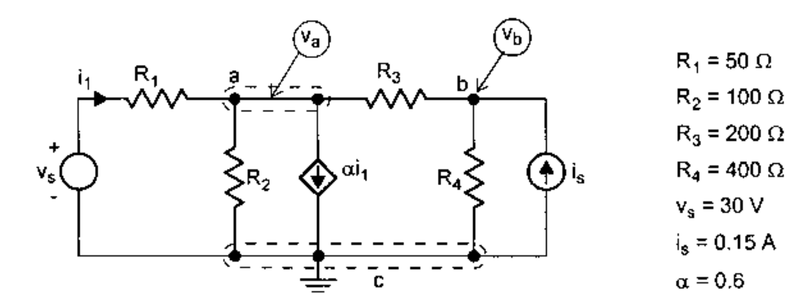


Figure 3-15 Un circuit résistif avec une source commandée.

En considérant que toutes les sources sont indépendantes, nous établissons les équations d'équilibre par la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1}-\alpha i_1 \\ i_s \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}60)$$

La source de courant commandée est égale à αi_1 où i_1 est donné par:

$$i_1 = \frac{v_s - v_a}{R_1} \tag{3-61}$$

En remplaçant la relation (3-61) dans l'équation (3-60), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} - \alpha\frac{v_s - v_a}{R_1} \\ i_s \end{bmatrix} \tag{3-62}$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{\alpha}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\frac{v_s}{R_1} \\ i_s \end{bmatrix} \tag{3-63}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{200}-\frac{0.6}{50} & -\frac{1}{200} \\ -\frac{1}{200} & \frac{1}{200}+\frac{1}{400} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-0.6)\frac{30}{50} \\ 0.15 \end{bmatrix} \tag{3-64}$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix} 0.023 & -0.005 \\ -0.005 & 0.0075 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.15 \end{bmatrix} \tag{3-65}$$

En résolvant cette équation matricielle, on obtient:

$v_a = 17.288\text{V}$ et $v_b = 31.525\text{V}$

Les tensions et courants du circuit peuvent être calculés à partir des tensions nodales v_a et v_b.

Exemple 3-7 Détermination de l'équivalent Thévenin d'un dipôle contenant une source commandée

Considérons le dipôle montré dans la figure 3-16.

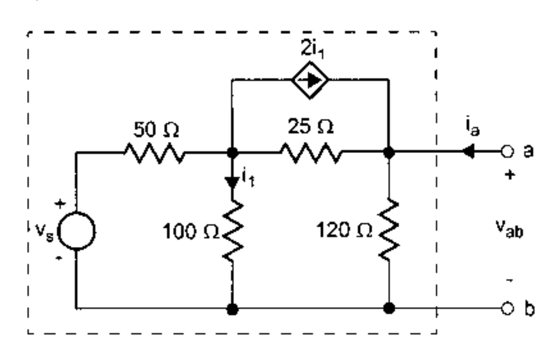


Figure 3-16 Un dipôle contenant une source commandée.

On désire déterminer l'équivalent Thévenin vu aux bornes a-b du dipôle.

Ce dipôle contient une source commandée de telle sorte qu'on ne peut déterminer l'équivalent Thévenin par la méthode classique (calcul séparé de R_T et V_T). Par contre, on peut obtenir l'équivalent Thévenin du dipôle en déterminant la relation entre la tension v_{ab} et le courant i_a. Pour ce faire, on connecte aux bornes a-b une source de tension v_{ab} et on calcule le courant i_a en fonction de v_{ab}, comme illustré dans la figure 3-17.

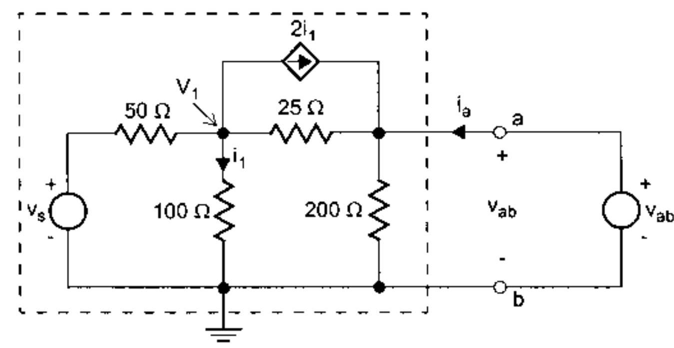


Figure 3-17 Une source de tension est connectée aux bornes a-b du dipôle.

On définit V_1 comme la tension nodale du circuit. L'équation d'équlibre du circuit est obtenue par la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right]V_1 = \frac{v_s}{50}-2i_1+\frac{v_{ab}}{10} \qquad (3\text{-}66)$$

Mais: $\quad i_1 = \dfrac{V_1}{100}$.

Alors, l'équation (3-66) devient:

$$\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{25}\right]V_1 = \frac{v_s}{50}-2\left(\frac{V_1}{100}\right)+\frac{v_{ab}}{25} \qquad (3\text{-}67)$$

Ou encore:

$$\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{25}+\frac{2}{100}\right]V_1 = \frac{v_s}{50}+\frac{v_{ab}}{25} \qquad (3\text{-}68)$$

$$9V_1 = 2v_s+4v_{ab} \qquad (3\text{-}69)$$

On déduit: $\quad V_1 = \frac{2}{9}v_s+\frac{4}{9}v_{ab}$

Le courant i_a est donné par:

$$i_a = \frac{v_{ab}}{200}+\frac{v_{ab}-V_1}{25}-2i_1 = \frac{v_{ab}}{200}+\frac{v_{ab}-V_1}{25}-2\left(\frac{V_1}{100}\right) = 0.045v_{ab}-0.06V_1$$

$$i_a = 0.045v_{ab}-0.06\left(\frac{2}{9}v_s+\frac{4}{9}v_{ab}\right) = 0.0183v_{ab}-0.0133v_s$$

À partir de cette relation, on peut écrire:

$$v_{ab} = 54.545i_a+0.727v_s$$

On peut identifier dans cette relation la résistance Thévenin R_T et la source Thévenin

V_T:

$R_T = 54.545\ \Omega$

$V_T = 0.727 v_s$

Remarque:

Pour déterminer la relation v-i du dipôle, au lieu d'utiliser une source de tension, on peut aussi connecter aux bornes a-b une source de courant i_a et calculer la tension v_{ab} résultante en fonction de i_a.

Exemple 3-8 Équations d'équilibre d'un circuit général avec une source commandée

Considérons le circuit montré dans la figure 3-18.

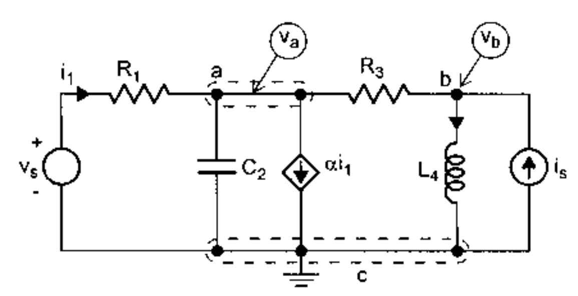


Figure 3-18 Un circuit général avec une source commandée.

En considérant que toutes les sources sont indépendantes, nous établissons les équations d'équilibre par la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_2\frac{d}{dt} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_4}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} - \alpha i_1 \\ i_s \end{bmatrix} \tag{3-70}$$

La source de courant commandée est égale à αi_1 où i_1 est donné par:

$$i_1 = \frac{v_s - v_a}{R_1} \tag{3-71}$$

En remplaçant la relation (3-71) dans l'équation (3-70), nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_2\frac{d}{dt} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_4}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} - \alpha\frac{v_s - v_a}{R_1} \\ i_s \end{bmatrix} \tag{3-72}$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_2\frac{d}{dt} + \frac{1}{R_3} - \frac{\alpha}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_4}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\frac{v_s}{R_1} \\ i_s \end{bmatrix} \tag{3-73}$$

Exemple 3-9 Équations d'équilibre d'un circuit résistif avec un AMPLI OP
Soit un circuit résistif avec un ampli opérationnel montré dans la figure 3-19.

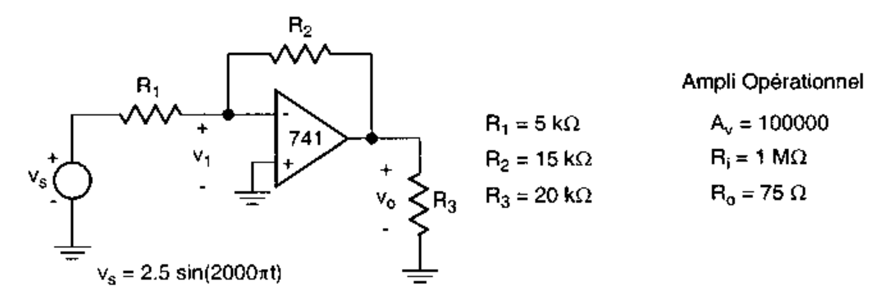


Figure 3-19 Un circuit résistif avec un amplificateur opérationnel.

On obtient le circuit équivalent du système en remplaçant l'AMPLI OP par son modèle simple comme illustré dans la figure 3-20.

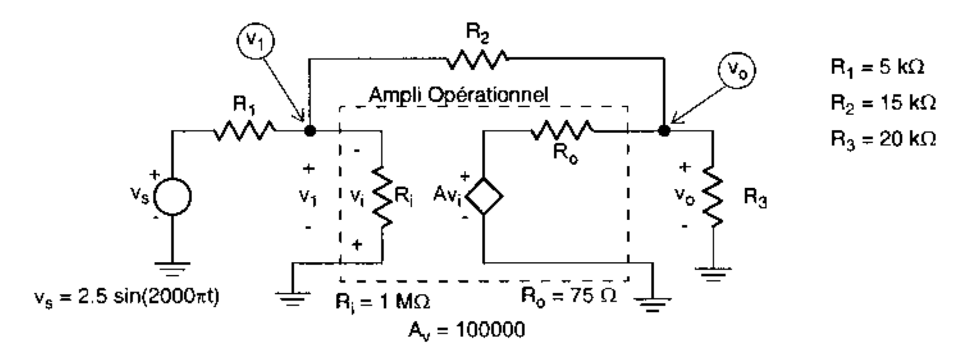


Figure 3-20 Circuit équivalent obtenu en remplaçant l'AMPLI OP par son modèle simple.

On établit les équations d'équilibre en utilisant la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_i} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ \frac{A_v v_i}{R_o} \end{bmatrix} \tag{3-74}$$

Mais: $v_i = -v_1$

Alors, l'équation (3-74) devient:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_i} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2}+\frac{A_v}{R_o} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-75}$$

En remplaçant les valeurs numériques dans cette équation, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 2.6766\times10^{-4} & -6.6666\times10^{-5} \\ 1333.3332666 & 0.01345 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{5000} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}76)$$

La résolution de cette équation matricielle donne:

$$v_1 = 0.0003v_s \quad \text{et} \quad v_o = -2.99875v_s$$

En utilisant un modèle plus simple pour l'ampli opérationnel, on peut réduire le nombre de tensions nodales à 1. La figure 3-21 montre le circuit équivalent obtenu avec un modèle plus simple.

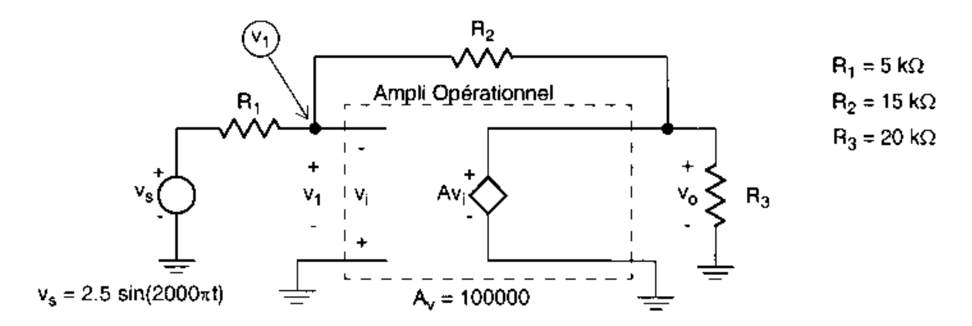


Figure 3-21 Un circuit équivalent plus simple avec une seule tension nodale.

La seule tension nodale dans ce cas est v_1.

On écrit:

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] v_1 = \frac{A_v v_i}{R_2} + \frac{v_s}{R_1} \qquad (3\text{-}77)$$

ou bien:

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{A_v}{R_2}\right] v_1 = \frac{v_s}{R_1} \qquad (3\text{-}78)$$

Cette équation donne:

$$v_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_v}{R_2}} \times v_s \qquad (3\text{-}79)$$

On déduit:

$$v_o = -A_v v_1 = -\frac{A_v \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A_v}{R_2}} \times v_s \qquad (3\text{-}80)$$

Avec A_v = 100000 (>> 1), on peut approximer v_o comme:

$$v_o \approx -\frac{A_v \frac{1}{R_1}}{\frac{1 + A_v}{R_2}} \times v_s \approx -\frac{A_v \frac{1}{R_1}}{\frac{A_v}{R_2}} \times v_s \approx \frac{-R_2}{R_1} \times v_s \qquad (3\text{-}81)$$

Analyse simplifiée avec un ampli op idéal

Le circuit considéré dans cet exemple peut être analysé de façon encore plus simple en utilisant un modèle idéal pour l'ampli op.

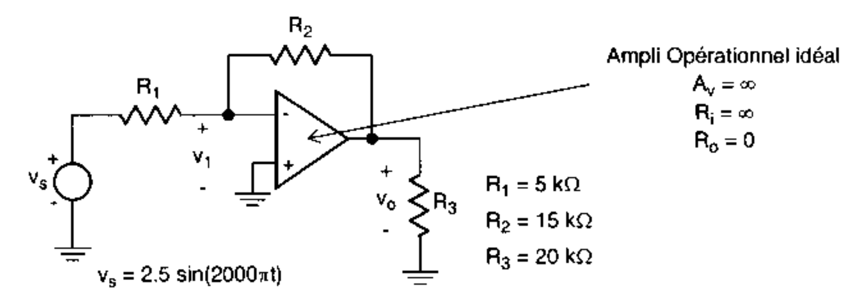


Figure 3-22 Un circuit résistif avec un amplificateur opérationnel idéal.

On obtient le circuit équivalent du système en remplaçant l'AMPLI OP par son modèle idéal comme illustré dans la figure 3-23.

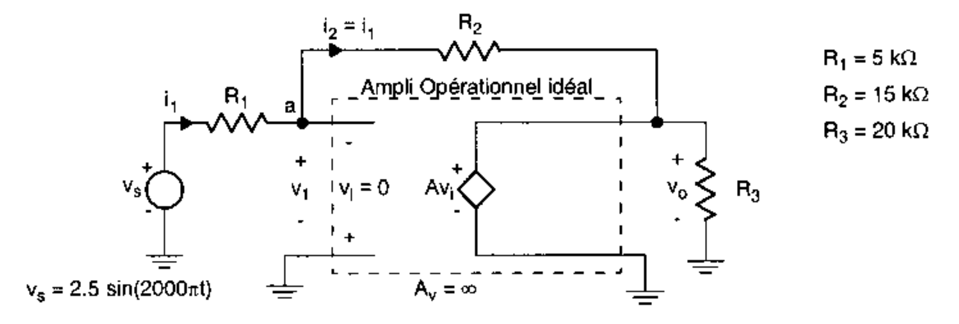


Figure 3-23 Circuit équivalent obtenu en remplaçant l'AMPLI OP par son modèle idéal.

Car $A_v = \infty$, la tension d'entrée v_i de l'ampli op est égale à 0. Cela signifie que le noeud a est au même potentiel que la masse:

$$v_a = 0$$

(À remarquer que la tension du noeud a est zéro mais il n'est pas relié à la masse.)

Au noeud a, on a: $i_1 = i_2$

Ou bien: $\frac{v_s}{R_1} = \frac{-v_o}{R_2}$

On déduit: $v_o = \left(\frac{-R_2}{R_1}\right) \times v_s$.

Exercices

3.1 Soit le circuit montré dans la figure E3.1.

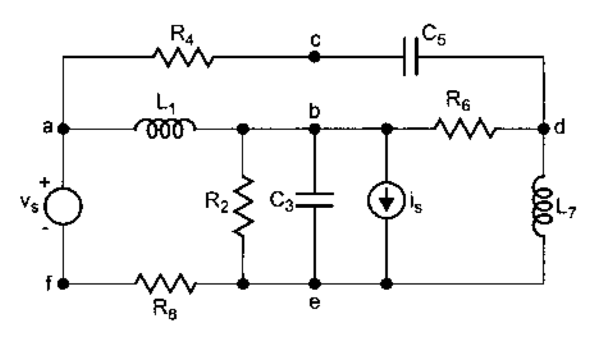


Figure E3.1

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode directe (méthode longue).
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
c) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
d) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les trois méthodes.

3.2 Soit le circuit montré dans la figure E3.2.

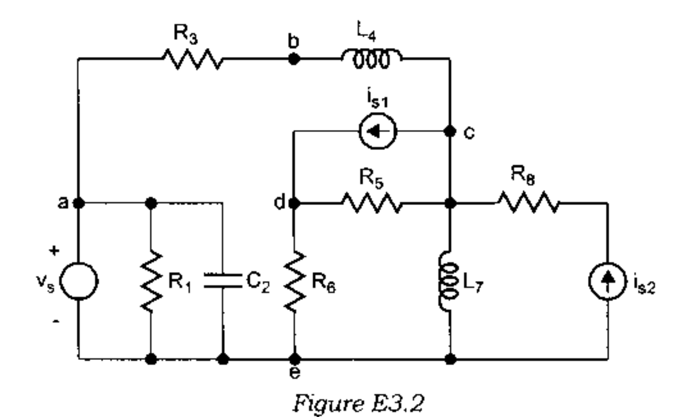


Figure E3.2

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode directe (méthode longue).
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
c) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
d) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les trois méthodes.

3.3 Soit le circuit montré dans la figure E3.3.

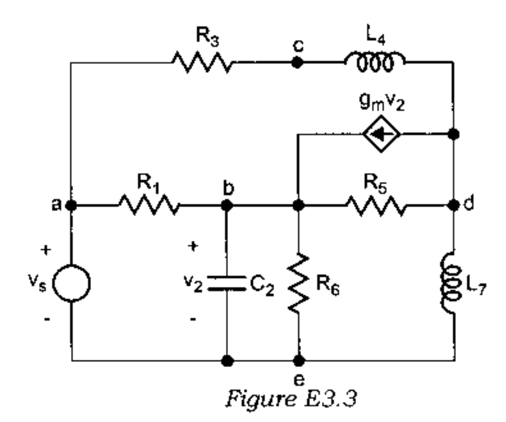


Figure E3.3

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.4 Soit le circuit montré dans la figure E3.4.

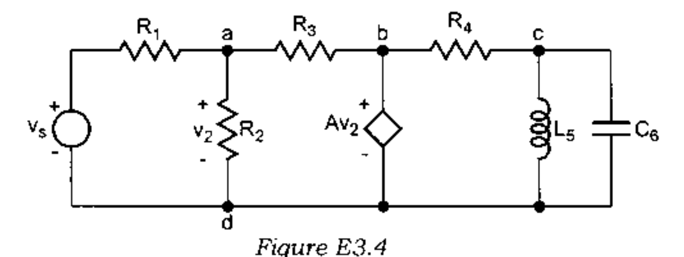


Figure E3.4

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.5 Soit le circuit montré dans la figure E3.5.

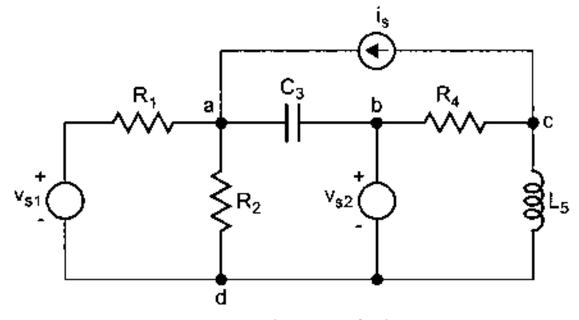


Figure E3.5

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.6 Soit le circuit montré dans la figure E3.6.

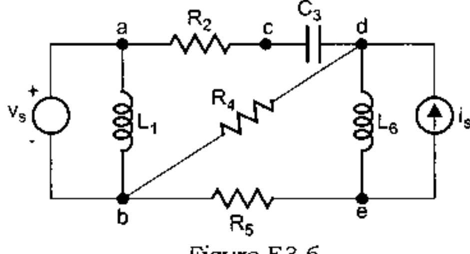


Figure E3.6

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.7 Soit le circuit montré dans la figure E3.7.

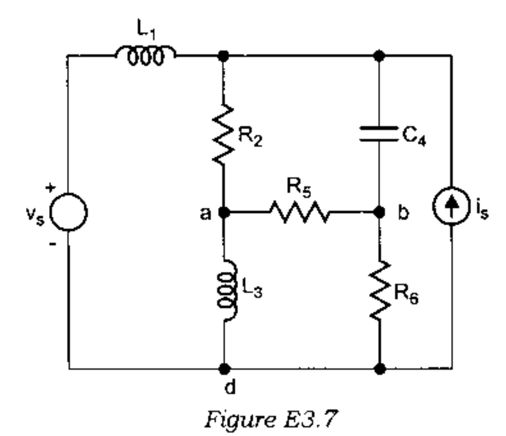


Figure E3.7

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.8 Soit le circuit montré dans la figure E3.8.

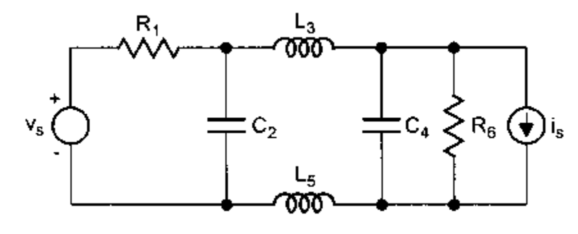


Figure E3.8

a) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds.
b) Écrire les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles.
c) Comparer le nombre d'équations obtenues avec les deux méthodes.

3.9 Soit le circuit résistif montré dans la figure E3.9.

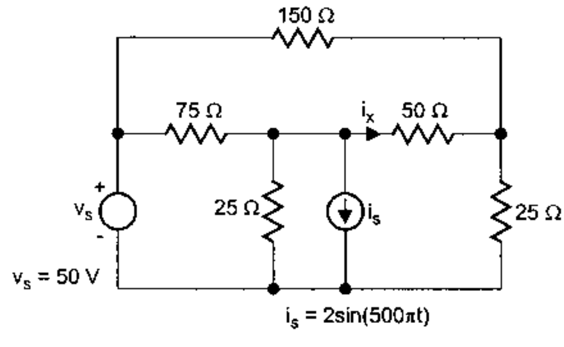


Figure E3.9

a) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode de noeuds.
b) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des mailles.
c) À l'aide des résultats de a ou b, déterminer le courant i_x.

3.10 Soit le circuit résistif montré dans la figure E3.10.

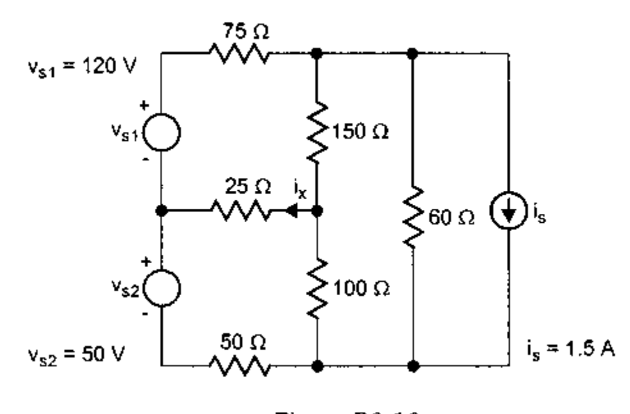


Figure E3.10

a) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des noeuds.
b) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des mailles.
c) À l'aide des résultats de a ou b, déterminer le courant i_x.

3.11 Soit le circuit résistif montré dans la figure E3.11.

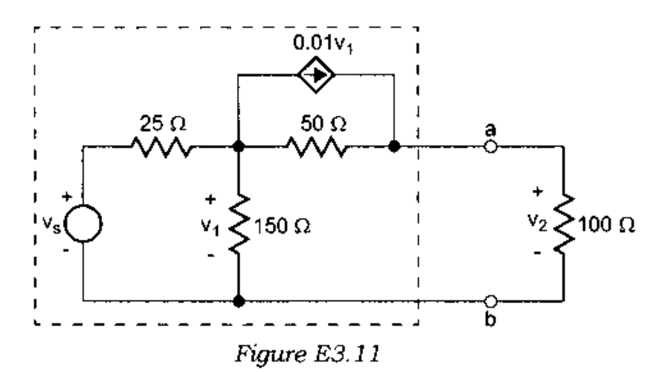


Figure E3.11

a) Déterminer l'équivalent Thévenin de la partie gauche (bornes a-b) du circuit.

b) À l'aide du résultat de a, déterminer la tension v_2 en fonction de v_s.

3.12 Soit le circuit résistif montré dans la figure E3.12.

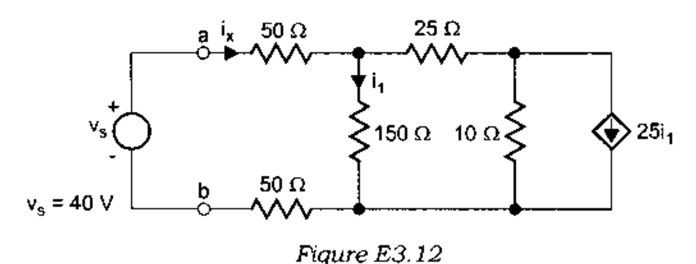


Figure E3.12

a) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des mailles. Calculer le courant i_x.

b) Déterminer la résistance équivalente vue par la source v_s aux bornes a-b.

3.13 Soit le circuit montré dans la figure E3.13.

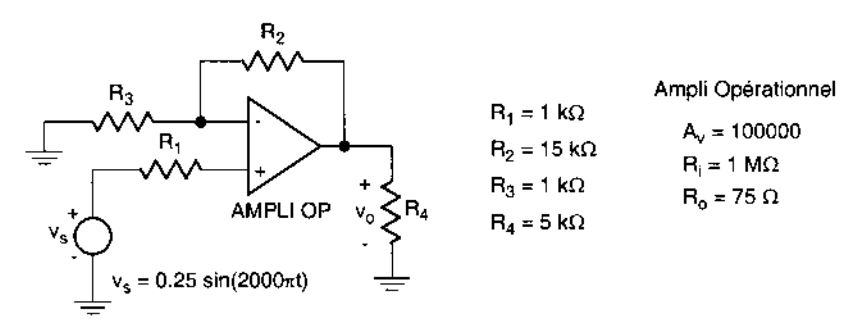


Figure E3.13

a) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des noeuds. (On considère que l'ampli op est idéal.)

b) Déterminer le gain en tension $A = v_o/v_s$.

c) Déterminer la tension de sortie v_o.

3.14 Soit le circuit montré dans la figure E3.14.

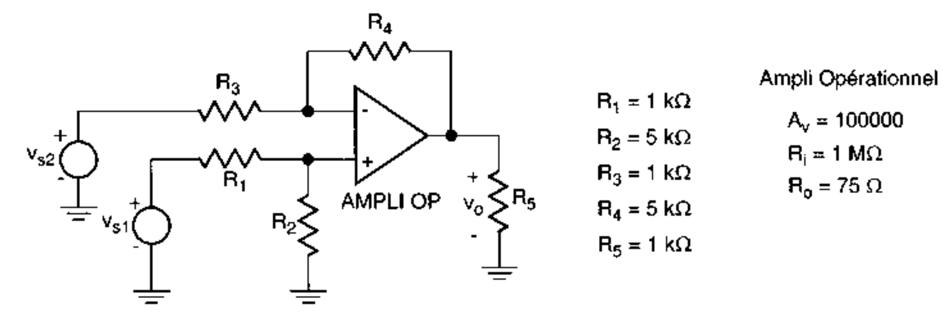


Figure E3.14

a) Établir les équations d'équilibre du circuit utilisant la méthode des noeuds. (On considère que l'ampli op est idéal.)

b) Déterminer la tension de sortie v_0 en fonction de v_{s1} et v_{s2}. Quelle est la fonction de ce circuit?

Chapitre 4

FONCTIONS D'EXCITATION

Dans ce chapitre, les fonctions mathématiques utilisées pour modéliser les sources d'excitation des circuits électriques sont étudiées.

4.1 Excitations électriques

Les excitations électriques sont des fonctions du temps. Elles peuvent être classées en deux grandes catégories: excitations apériodiques et excitations périodiques.

Les excitations apériodiques sont les excitations qui ne se répètent pas. La figure 4-1 illustre quelques exemples d'excitations apériodiques.

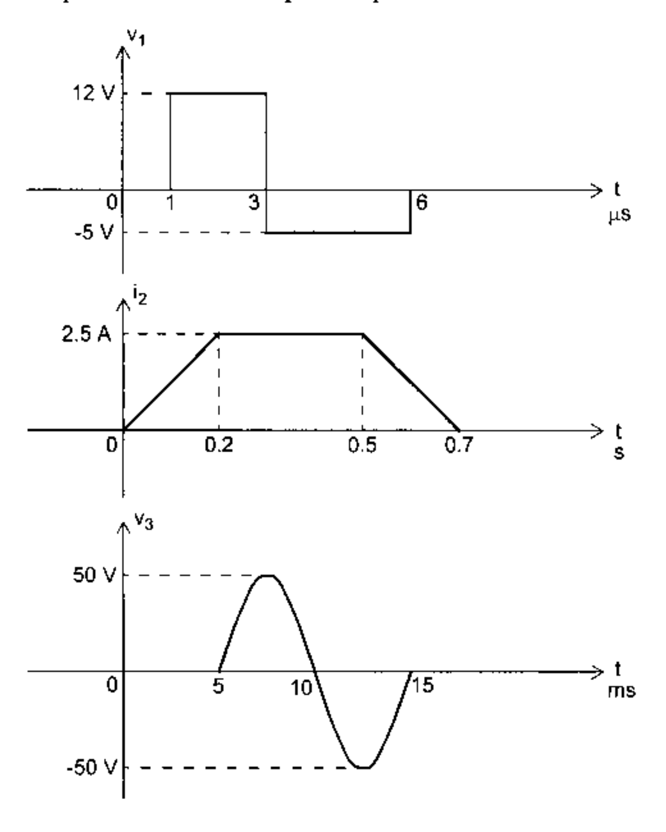


Figure 4-1 Exemples d'excitations apériodiques.

Les excitations périodiques sont les excitations qui se répètent à intervalles réguliers La figure 4-2 illustre quelques exemples d'excitations périodiques.

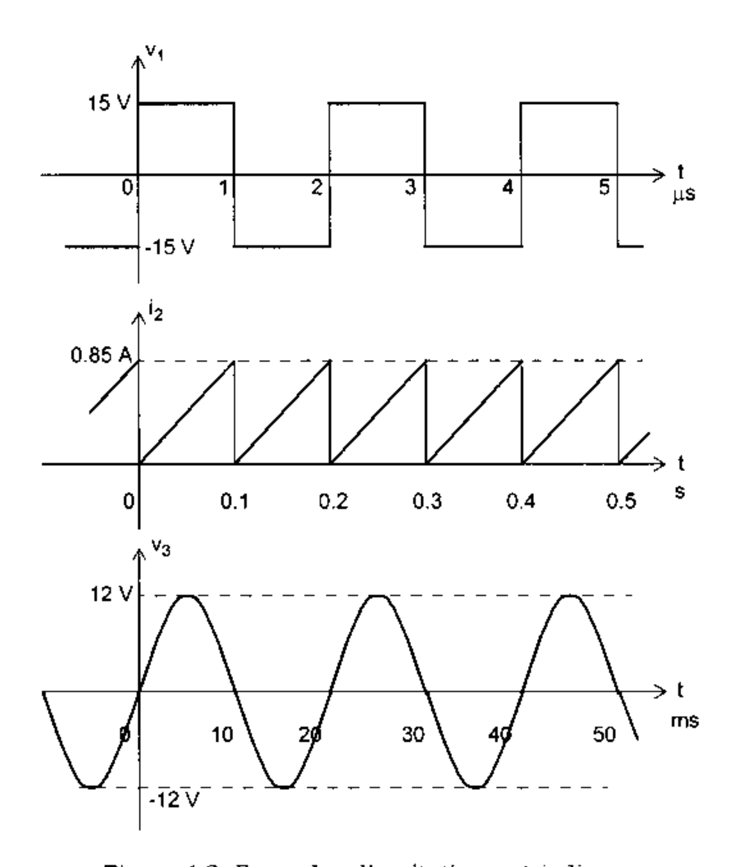


Figure 4-2 Exemples d'excitations périodiques.

Les circuits contenant les éléments R, L, C, transformateurs idéals et sources comman dées sont des circuits linéaires auxquels on peut appliquer le principe de superposi tion. Il est donc possible de décomposer une excitation complexe en une somm d'excitations simples que l'on peut considérer individuellement. La réponse totale ser. égale à la somme des réponses à des excitations individuelles.

Pour décomposer une excitation apériodique, on utilise les fonctions singulières telle que l'impulsion, l'échelon, la rampe, etc.

Pour décomposer une fonction périodique, on utilise les fonctions exponentielles et le fonctions sinusoïdales.

4.2 Fonctions singulières

Dans l'analyse transitoire des circuits électriques, on utilise habituellement une famille de fonctions singulières comprenant l'échelon unitaire, l'impulsion, la rampe, ... comme fonctions d'excitation.

4.2.1 Échelon unitaire

L'*échelon unitaire* u(t) est une fonction discontinue du temps définie comme:

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (4\text{-}1)$$

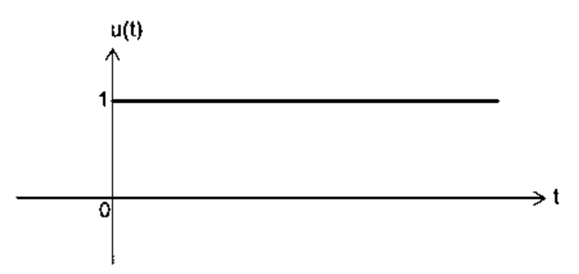


Figure 4-3 Échelon unitaire.

L'échelon unitaire est utilisé pour modéliser une excitation qui change brusquement de valeur à un instant donné. Considérons par exemple le système électrique illustré dans la figure 4-4.

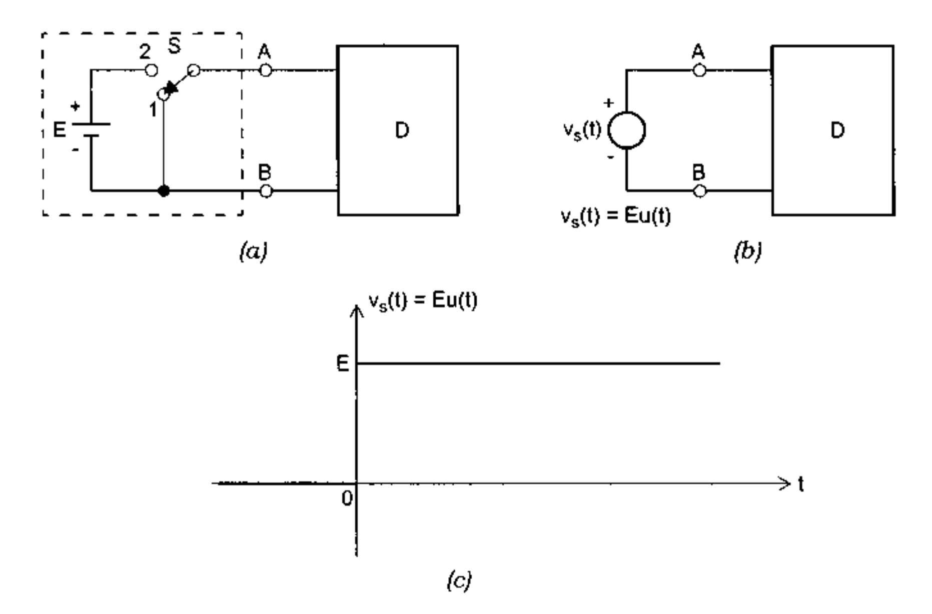


Figure 4-4 Modélisation d'une source continue appliquée brusquement à t = 0. (a) Source continue appliquée à t = 0. (b) Modèle. (c) Formes d'ondes.

Dans ce système, le commutateur S est à la position 1 depuis longtemps. À l'instant t = 0, S change de position de 1 à 2. La tension aux bornes A-B change brusquement de valeur de 0 à E à l'instant t = 0. L'ensemble de la source continue E et le commutateur S peut être représenté par une source de tension échelon $v_s(t) = Eu(t)$.

Une excitation f(t) appliquée brusquement à t = 0 peut être représentée par x(t) = f(t)u(t). Un exemple est illustré dans la figure 4-5 où le commutateur S change brusquement de position de 1 à 2 à l'instant t = 0.

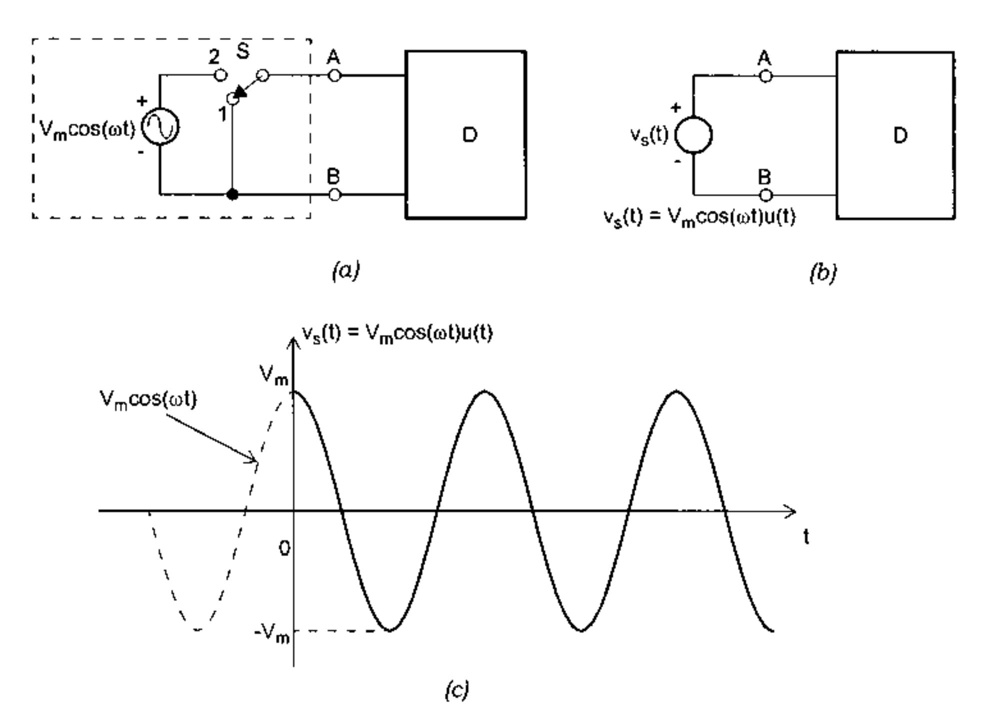


Figure 4-5 Modélisation d'une excitation sinusoïdale appliquée brusquement à t = 0. (a) Source sinusoïdale appliquée à t = 0. (b) Modèle. (c) Formes d'ondes.

Un échelon qui commence à $t = t_0$ est exprimé comme $u(t-t_0)$.

Une excitation f(t) appliquée à $t = t_0$ est représentée par $f(t)u(t-t_0)$.

Une excitation f(t) retardée de t_0 et appliquée à $t = t_0$ est représentée par $f(t-t_0)u(t-t_0)$.

La figure 4-6 illustre ces différentes fonctions d'excitation.

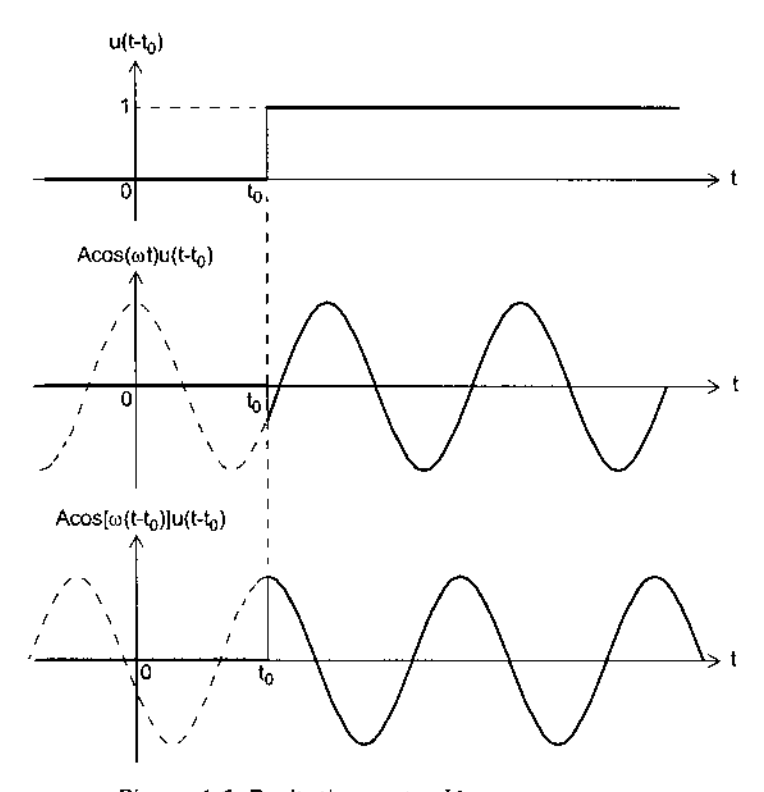


Figure 4-6 Excitations retardées.

4.2.2 Impulsion unitaire

L'*impulsion unitaire* δ(t) est une fonction du temps définie comme la dérivée de l'échelon unitaire:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}[u(t)] \tag{4-2}$$

Les propriétés de δ(t) sont:

- elle est nulle pour tout t, excepté à t = 0,
- elle est infinie à t = 0,
- sa surface est égale à 1.

L'échelon unitaire u(t) est égale à l'intégrale de l'impulsion δ(t):

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(x)dx = u(t) \tag{4-3}$$

Lors qu'on multiplie δ(t) par une constante A, on obtient une impulsion de surface A:

$$\int_{-\infty}^{t} A\delta(x)dx = Au(t) \tag{4-4}$$

La fonction Aδ(t) est nulle pour tout t, excepté à t = 0, est infinie à t = 0, et possède une surface égale à A.

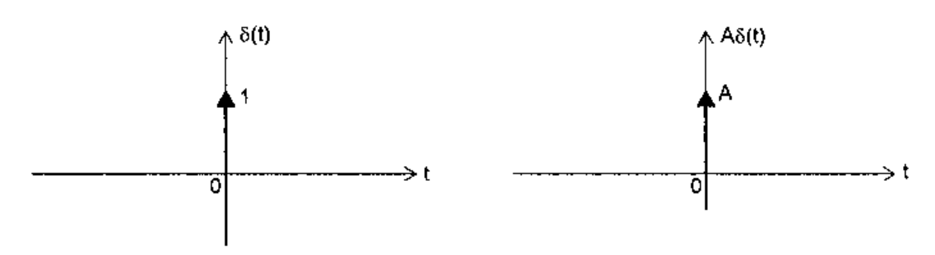


Figure 4-7 Fonctions impulsions δ(t) et Aδ(t).

Considérons une fonction continue du temps f(t). Le produit f(t)δ(t) est nul pour tout t, excepté à t = 0. Nous avons:

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\delta(x)dx = f(0)u(t) \tag{4-5}$$

On déduit:

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{4-6}$$

Alors, le produit d'une fonction continue f(t) et l'impulsion δ(t) donne une impulsion de surface égale à la valeur de la fonction f(t) à t = 0.

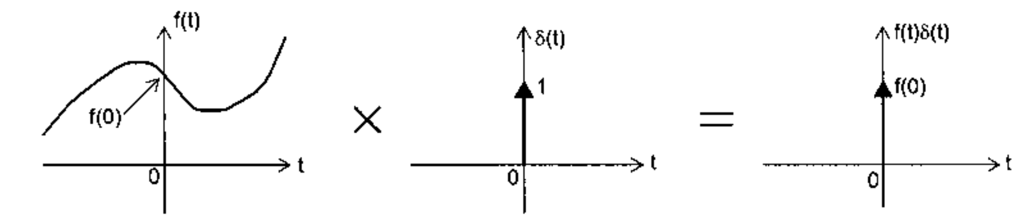


Figure 4-8 Multiplication d'une fonction f(t) et l'impulsion δ(t).

4.2.3 Rampe unitaire

La *rampe unitaire* r(t) est définie comme l'intégrale de l'échelon unitaire u(t):

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt \tag{4-7}$$

La rampe unitaire est une droite de pente 1, qui commence à t = 0:

$$r(t) = \begin{bmatrix} 0 \text{ pour } t < 0 \\ t \text{ pour } t \geq 0 \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

On écrit aussi:

$$r(t) = tu(t) \tag{4-9}$$

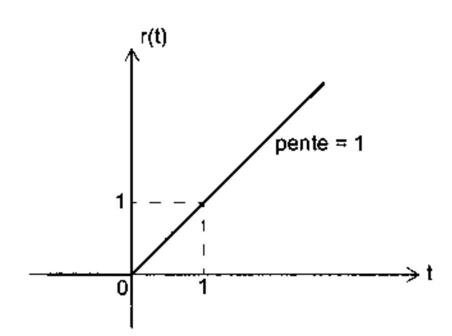


Figure 4-9 Rampe unitaire.

4.3 Fonctions apériodiques

Les fonctions d'excitation apériodiques peuvent être décomposées en des sommes de fonctions singulières. Diverses techniques de décomposition sont illustrées dans les exemples qui suivent.

Exemple 4-1 Décomposition d'une impulsion carrée en une somme d'échelons

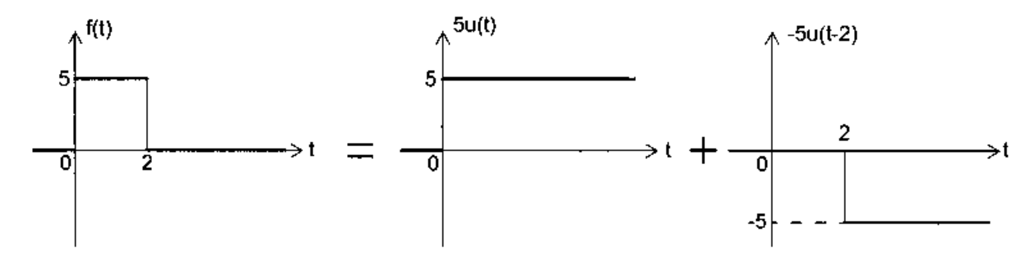


Figure 4-10 Décomposition d'une impulsion carrée.

Nous écrivons: $f(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$

Exemple 4-2 Décomposition d'une excitation en une somme de rampes

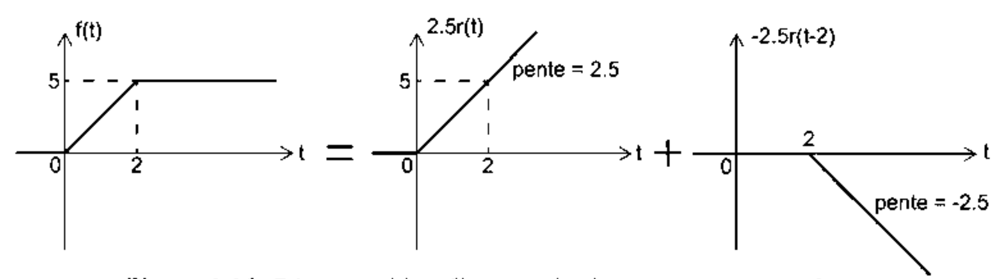


Figure 4-11 Décomposition d'une excitation en une somme de rampes.

Nous écrivons: $f(t) = 2.5r(t) - 2.5r(t-2)$

Exemple 4-3 **Décomposition d'une excitation en une somme d'échelons et de rampes**

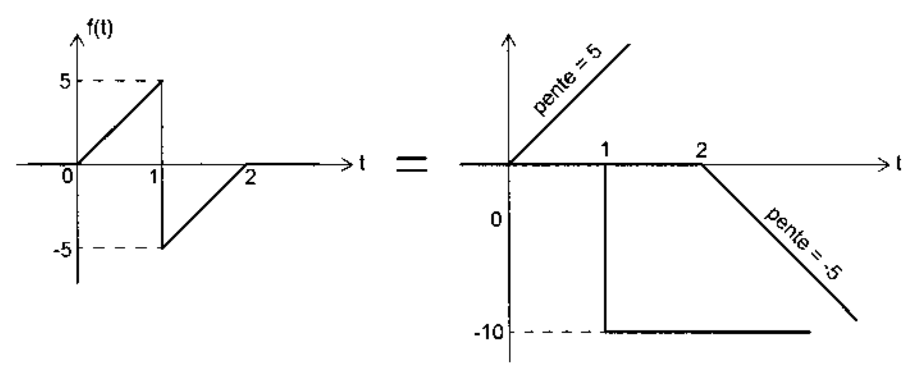


Figure 4-12 Décomposition d'une excitation en une somme de fonctions singulières.

Nous écrivons: $f(t) = 5r(t) - 10u(t-1) - 5r(t-2)$

Exemple 4-4 **Décomposition d'une excitation en une somme d'échelons et de rampes**

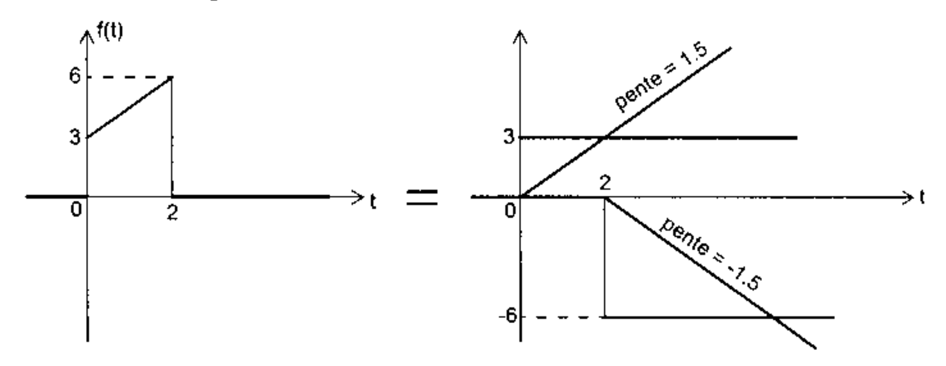


Figure 4-13 Décomposition d'une excitation en une somme de fonctions singulières.

Nous écrivons: $f(t) = 1.5r(t) + 3u(t) - 6u(t-2) - 1.5r(t-2)$

4.4 Fonctions exponentielles

Une *fonction exponentielle complexe* du temps est une fonction de la forme suivante:

$$x(t) = \mathbf{X}e^{\mathbf{s}t} \tag{4-10}$$

où $\mathbf{X} = |X|e^{j\phi}$ est l'amplitude complexe,

$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ est la fréquence complexe.

Nous pouvons aussi exprimer la fonction exponentielle x(t) sous la forme suivante:

$$x(t) = |X|e^{j\phi}e^{(\sigma + j\omega)t} = |X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t + \phi)} \tag{4-11}$$

La fréquence complexe **s** comprend une partie réelle et une partie imaginaire:

• la partie réelle σ est définie comme la *fréquence népérienne*. Elle représente le taux de variation de l'amplitude de x(t). Elle a comme dimension neper/s. Lorsque $\sigma < 0$, on l'appelle *facteur d'atténuation*.

• la partie imaginaire ω est définie comme la *fréquence angulaire*. Elle représente le taux de variation de la phase de x(t). Elle a comme dimension rad/s. La fréquence angulaire est reliée à la fréquence et à la période par:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

où f est la fréquence en Hz et T est la période en s.

4.4.1 Cas où X et s sont réels

Si **X** et **s** sont réels, la fonction x(t) est une *fonction exponentielle réelle du temps*:

$$x(t) = |X| e^{\sigma t} \tag{4-12}$$

L'allure de la fonction exponentielle réelle $|X| e^{\sigma t}$ dépend du signe de σ:

- $\sigma > 0$: $|X| e^{\sigma t}$ est une exponentielle croissante
- $\sigma = 0$: $|X| e^{\sigma t}$ est une constante
- $\sigma < 0$: $|X| e^{\sigma t}$ est une exponentielle décroissante

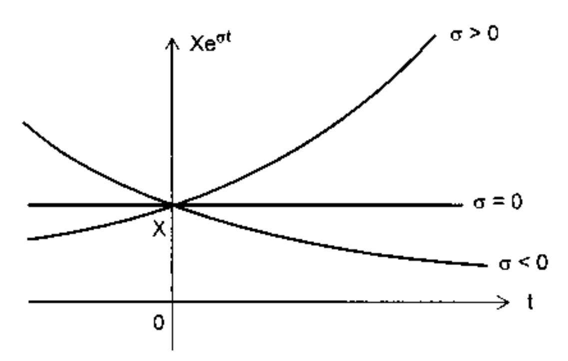


Figure 4-14 Fonctions exponentielles réelles.

La fonction exponentielle $e^{\sigma t}$ est caractérisée par sa *constante de temps* τ qui est égale à:

$$\tau = \frac{1}{\sigma} \tag{4-13}$$

4.4.2 Cas où X et s sont complexes

Si **X** et **s** sont complexes, la fonction $\mathbf{X}e^{\mathbf{s}t}$ est une fonction complexe du temps:

$$x(t) = |X| e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)} \tag{4-14}$$

On peut représenter la fonction x(t) par un vecteur tournant $\vec{\mathbf{X}}$ (appelé *phaseur* ou *vecteur complexe*) dans la plan complexe avec:

$|X| e^{\sigma t}$ est la longueur du vecteur,

$(\omega t + \phi)$ est l'angle du vecteur.

On constate que le vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ tourne avec une vitesse angulaire égale à ω (en rad/s) et que sa longueur est une fonction exponentielle du temps.

La figure 4-15 montre la fonction $x(t) = |X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}$ dans le plan complexe pour les deux cas $\sigma < 0$ et $\sigma > 0$.

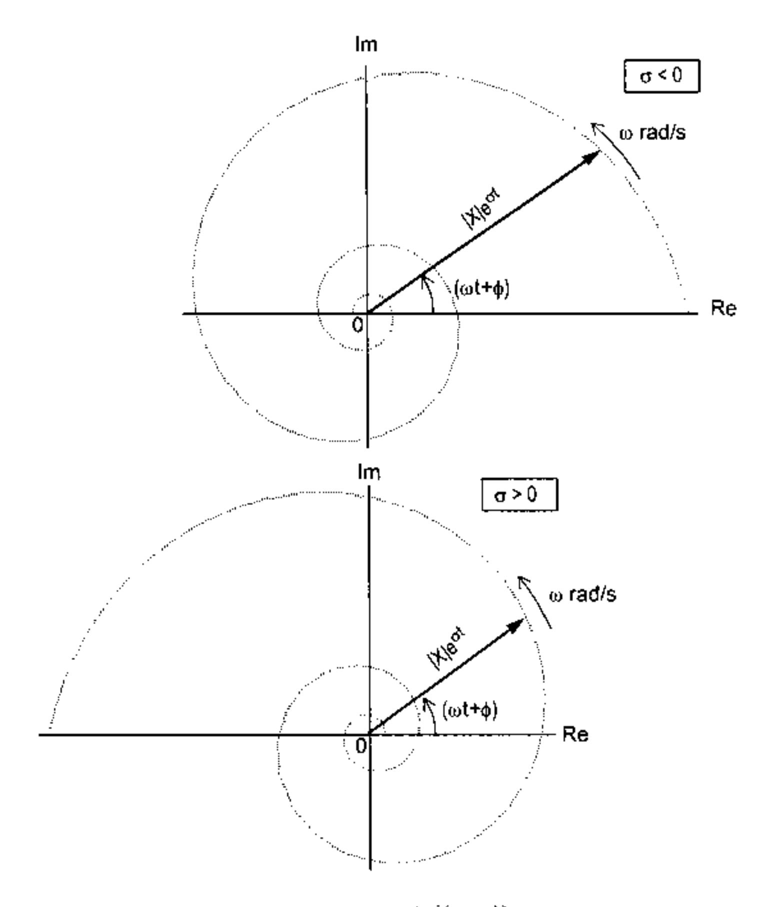


Figure 4-15 Représentation de $x(t) = |X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}$ *dans le plan complexe.*

La fonction complexe $x(t) = \mathbf{X}e^{st}$ ne peut être utilisée pour représenter une tension ou un courant qui sont des fonctions réelles du temps.

En utilisant la fonction $\mathbf{X}e^{st}$ et sa conjuguée $(\mathbf{X}e^{st})^*$ nous pouvons former une fonction réelle du temps y(t) qui peut être utilisée pour représenter une tension ou un courant. Nous écrivons:

$$y(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] = \frac{1}{2}[(|X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}) + (|X|e^{\sigma t}e^{-j(\omega t+\phi)})] \quad (4\text{-}15)$$

$$y(t) = |X|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) \quad (4\text{-}16)$$

On écrit aussi:

$$y(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{X}e^{st}\} = \mathrm{Re}\{|X|e^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega)t}\} = |X|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) \quad (4\text{-}17)$$

L'allure de y(t) dépend du signe de σ:

- $\sigma = 0$: y(t) est une fonction sinusoïdale à amplitude constante
- $\sigma > 0$: y(t) est une fonction sinusoïdale à amplitude croissant exponentiellement
- $\sigma < 0$: y(t) est une fonction sinusoïdale à amplitude décroissant exponentiellement

La figure 4-16 montre la fonction $y(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{X}e^{\mathbf{s}t}\} = |X|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$ pour ces trois cas.

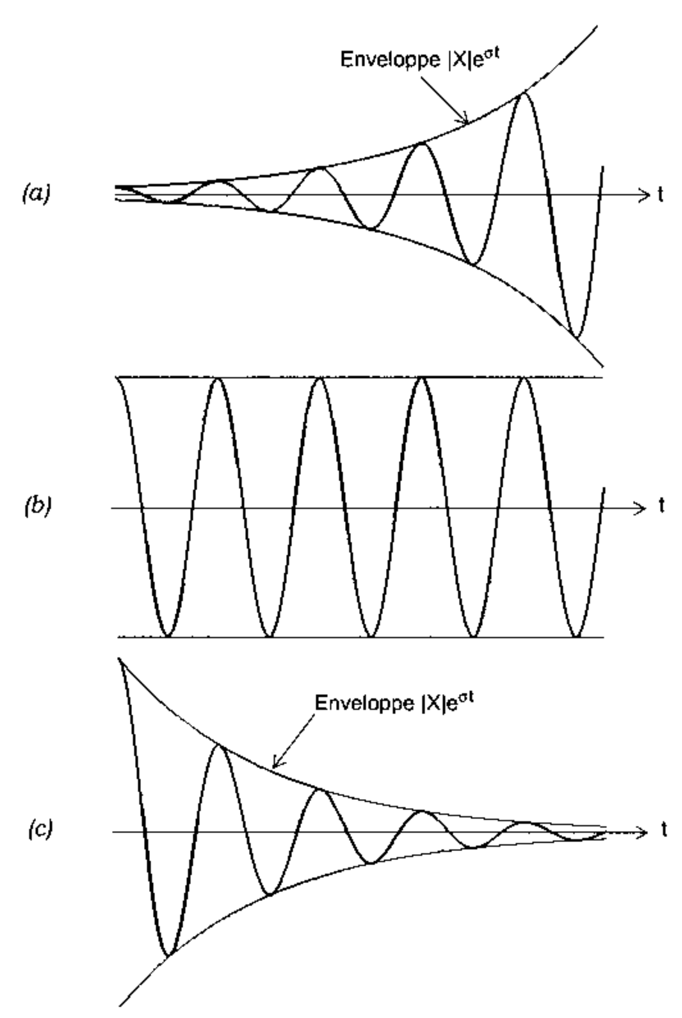


Figure 4-16 La partie réelle d'une fonction exponentielle complexe Xe^{st}.
(a) Cas où $\sigma > 0$. (b) Cas où $\sigma = 0$. Cas où $\sigma < 0$.

Nous pouvons utiliser la fonction $\mathbf{X}e^{\mathbf{s}t}$ et sa conjuguée $(\mathbf{X}e^{\mathbf{s}t})^*$ pour former une autre fonction réelle du temps z(t) qui peut être utilisée pour représenter une tension ou un courant. Nous écrivons:

$$z(t) = \frac{1}{2j}[x(t) - x^*(t)] = \frac{1}{2j}[(|X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t + \phi)}) - (|X|e^{\sigma t}e^{-j(\omega t + \phi)})] \qquad (4\text{-}18)$$

$$z(t) = |X|e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad (4\text{-}19)$$

On écrit aussi:

$$z(t) = \mathrm{Im}\{\mathbf{X}e^{st}\} = \mathrm{Im}\{|X|e^{j\phi}e^{(\sigma + j\omega)t}\} = |X|e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad (4\text{-}20)$$

4.5 Fonctions sinusoïdales

Considérons une fonction exponentielle complexe $x(t) = \mathbf{X}e^{st} = |X|e^{\sigma t}e^{j(\omega t + \phi)}$ avec $\sigma = 0$:

$$x(t) = |X|e^{j(\omega t + \phi)} \qquad (4\text{-}21)$$

Dans ce cas, la fonction x(t) est représentée dans le plan complexe par un vecteur tournant (vitesse = ω rad/s) dont la longueur est constante ($|X|$).

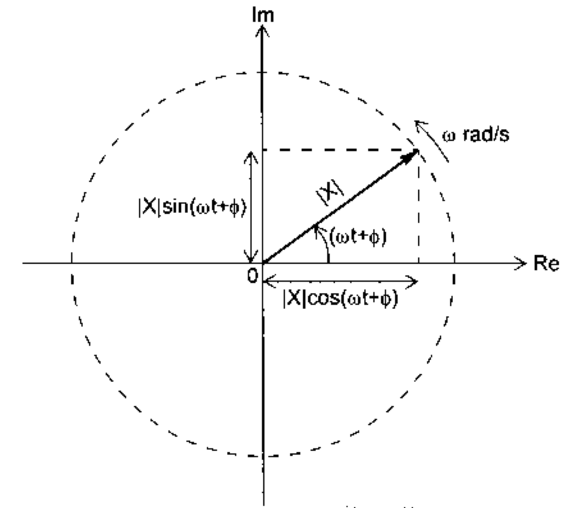


Figure 4-17 Représentation de x(t) = $|X|e^{j(\omega t + \phi)}$ dans le plan complexe.

La partie réelle de x(t) est une fonction sinusoïdale:

$$y(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x^*(t)\} = |X|\cos(\omega t + \phi) \qquad (4\text{-}22)$$

La partie imaginaire de x(t) est aussi une fonction sinusoïdale:

$$z(t) = \mathrm{Im}\{x(t)\} = \frac{1}{2j}\{x(t) - x^*(t)\} = |X|\sin(\omega t + \phi) \qquad (4\text{-}23)$$

Dans ces deux fonctions, $|X|$ est l'amplitude, ω est la fréquence angulaire (en rad/s) et ϕ est la phase (en rad).

La fréquence est définie comme: $f = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hz

La période est l'inverse de la fréquence: $T = \frac{1}{f}$ en seconde

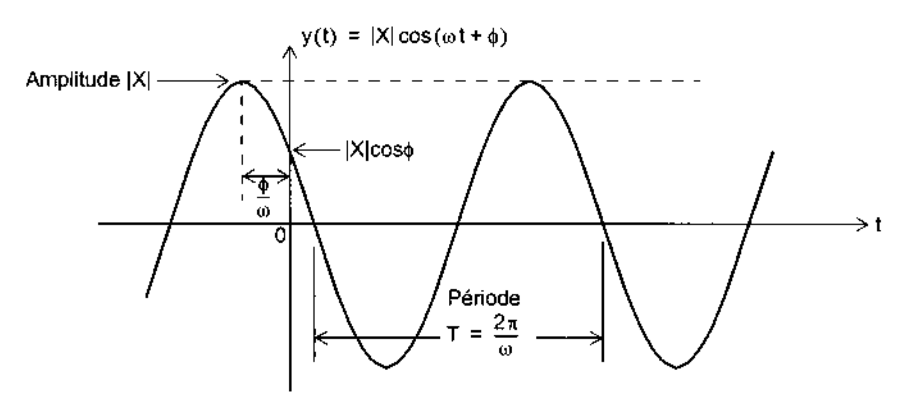


Figure 4-18 Fonction sinusoïdale.

4.6 Fonctions périodiques

Une fonction du temps f(t) est définie *périodique* si elle se répète à des intervalles de temps réguliers de T_0. Cet intervalle T_0 est défini comme la *période* de la fonction f(t).

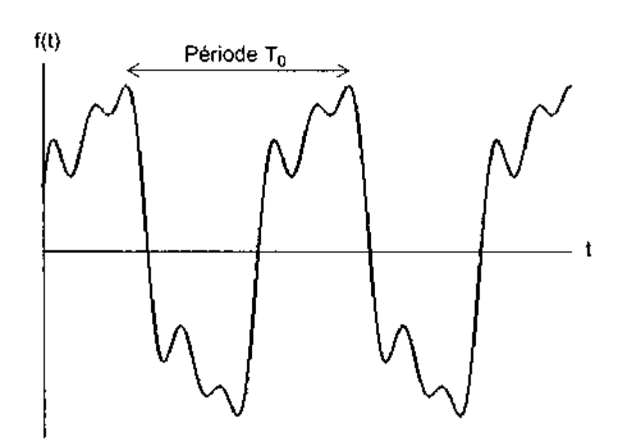


Figure 4-19 Fonction périodique.

La fréquence de la fonction f(t) est égale à l'inverse de sa période: $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

4.6.1 Série de Fourier

Une fonction périodique f(t) de période T_0 peut être exprimée comme une somme de fonctions exponentielles:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{4-24}$$

avec: $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

Cette série est connue comme *série de Fourier.*

Les coefficients C_n sont en général complexe: $C_n = |C_n|e^{j\phi_n}$

On peut démontrer que $C_{-n} = (C_n)^* = |C_n|e^{-j\phi_n}$. Par conséquent, on peut combiner les fonctions exponentielles complexes $C_n e^{jn\omega_0 t}$ et $C_n e^{-jn\omega_0 t}$ deux par deux afin de convertir la série (4-24) en une somme de fonctions sinusoïdales:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|\cos(n\omega_0 t + \phi_n) \tag{4-25}$$

où C_0 est la composante *continue*

$2|C_1|\cos(\omega_0 t + \phi_1)$ est la composante *fondamentale*

$2|C_n|\cos(n\omega_0 t + \phi_n)$ sont les composantes *harmoniques*

La composante continue est donnée par:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \tag{4-26}$$

Nous constatons que la composante continue est égale à la *valeur moyenne* de la fonction f(t) calculée sur une période T_0.

Exemple 4-5 Décomposition d'un train d'impulsions carrées en série de Fourier
Considérons le signal périodique x(t) montré dans la figure 4-20.

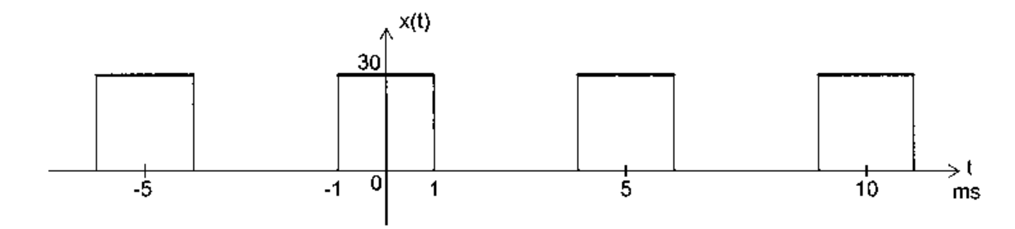


Figure 4-20 Train d'impulsions carrées.

La période du signal x(t) est T_0 = 5 ms. Sa fréquence est $f_0 = 1/0.005 = 200$ Hz. La fréquence angulaire est $\omega_0 = 2\pi f_0 = 400\pi$ rad/s.

La composante continue est égale à:

$$C_0 = \frac{1}{0.005}\int_{-0.001}^{0.001} 30dt = \frac{2}{5}\times 30 = 12$$

Les coefficients C_n sont donnés par:

$$C_n = \frac{1}{0.005}\int_{-0.001}^{0.001} 30e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{30}{0.005}\left(\frac{1}{-jn\omega_0}\right)e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-0.001}^{0.001}$$

$$C_n = \frac{30}{n\pi}\sin\left(n\frac{2\pi}{5}\right)$$

On calcule les premières composantes harmoniques:

$C_1 = 9.0819$	$C_2 = 2.8065$	$C_3 = -1.8710$
$C_4 = -2.2705$	$C_5 = 0.0$	$C_6 = 1.5137$
$C_7 = 0.8018$	$C_8 = -0.7016$	$C_9 = -1.0091$
$C_{10} = 0.0$	$C_{11} = \ldots$	$C_{12} = \ldots$

Alors, la fonction x(t) peut être exprimé comme une somme de plusieurs composantes:

$$x(t) = 12 + 18.1638\cos(\omega_0 t) + 5.613\cos(2\omega_0 t) - 3.742\cos(3\omega_0 t)$$
$$-4.541\cos(4\omega_0 t) + 3.0274\cos(6\omega_0 t) + 1.6036\cos(7\omega_0 t)$$
$$-1.4032\cos(8\omega_0 t) - 2.0182\cos(9\omega_0 t) + \ldots$$

avec $\omega_0 = 400\pi$ rad/s.

La figure 4-21 montre trois fonctions synthétisées utilisant respectivement les cinq, dix et quinze premières harmoniques de x(t).

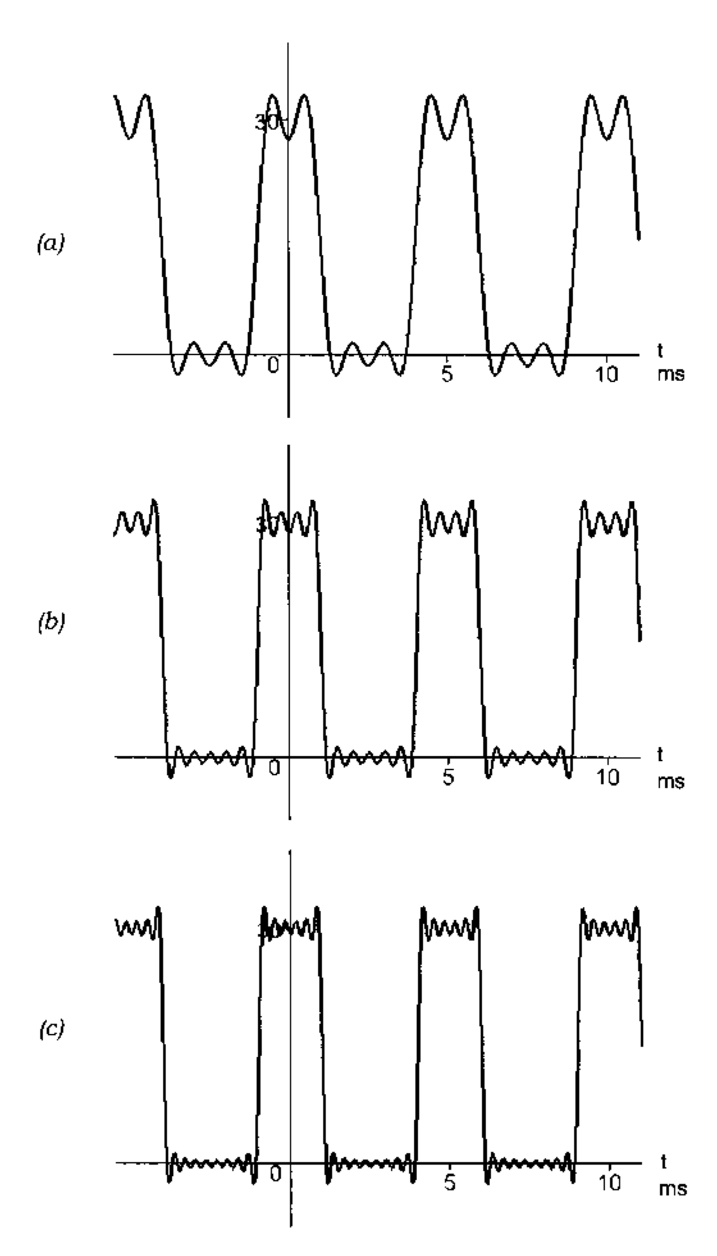


Figure 4-21 Synthèse du train d'impulsions carrée.
(a) Utilisant C_0 et les cinq premières harmoniques.
(b) Utilisant C_0 et les dix premières harmoniques.
(c) Utilisant C_0 et les quinze premières harmoniques.

Exercices

4.1 Écrire une expression mathématique pour chacune des excitations apériodiques montrées dans la figure E4-1.

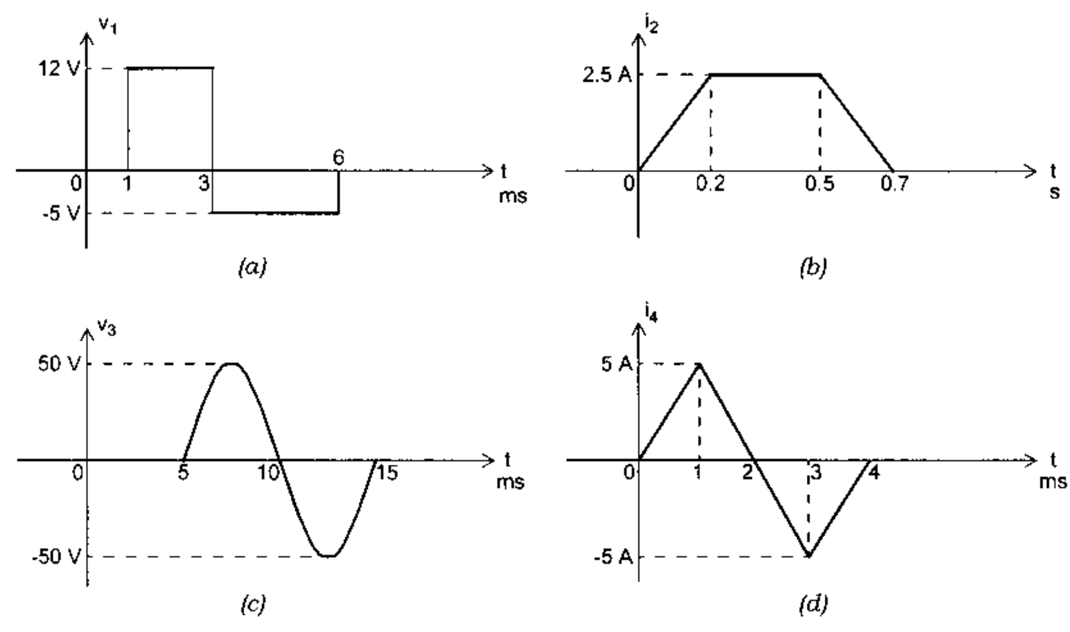


Figure E4-1

4.2 Tracer en fonction du temps les fonctions suivantes:

a) $f(t) = (5t-2)[u(t-1)-u(t-3)]$

b) $f(t) = 10\cos\left(1000\pi t-\frac{\pi}{4}\right)[u(t-1\times10^{-3})-u(t-3\times10^{-3})]$

c) $f(t) = 5u(t-10^{-3})-10u(t-3\times10^{-3})+5u(t-5\times10^{-3})$

d) $f(t) = -30r(t)+60r(t-0.1)-30r(t-0.3)-3u(t-0.5)$

4.3 Tracer en fonction du temps les fonctions suivantes:

a) $f(t) = 15e^{-2t}u(t)$

b) $f(t) = 15e^{-2(t-0.5)}u(t-0.5)$

c) $f(t) = 15e^{-2t}u(t-0.5)$

d) $f(t) = 15[1-e^{-2t}]u(t)$

e) $f(t) = 15e^{-2t}\cos(10t+0.5)u(t)$

f) $f(t) = 15e^{-2t}\cos(10t+0.5)u(t-0.5)$

4.4 Exprimer chacune des fonctions suivantes sous trois formes différentes: partie réelle d'une fonction exponentielle complexe, partie imaginaire d'une fonction exponentielle complexe, et somme de deux fonctions exponentielles complexes conjuguées:

a) $f(t) = 50\cos(500\pi t - 1.24)$

b) $f(t) = 50\sin(500\pi t + 0.55)$

c) $f(t) = 50e^{-15t}\cos(500\pi t + 0.9)$

d) $f(t) = 50e^{-15t}\sin(500\pi t - 0.9)$

4.5 Déterminer la composante continue et les composantes harmoniques de chacune des fonctions périodiques montrées dans la figure E4-5.

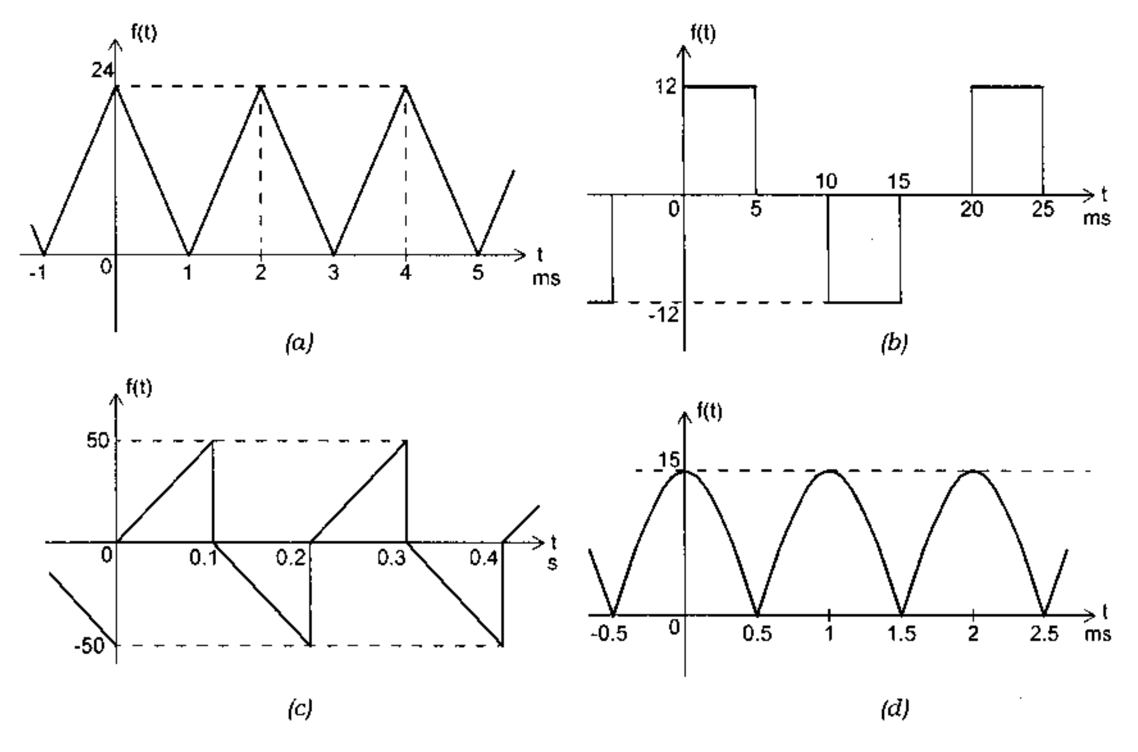


Figure E4-5

Chapitre 5

ANALYSE TRANSITOIRE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Dans ce chapitre, les méthodes d'analyse transitoire des circuits électriques sont présentées. Une méthode d'analyse utilisant les équations différentielles est étudiée et appliquée à des circuits du premier et du deuxième ordre.

5.1 Excitation et réponse

Considérons un circuit électrique auquel on applique des sources de tension et de courant à un certain instant que l'on peut prendre comme l'origine du temps (t = 0). Ces sources constituent *l'excitation* du circuit. Les tensions et courants dans les branches du circuit, résultants de l'application des sources, constituent *la réponse* du circuit.

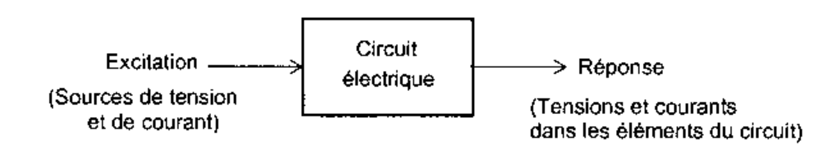


Figure 5-1 Excitation et réponse d'un circuit électrique.

Lors de l'analyse d'un circuit électrique, on étudie son comportement qui est représenté par la réponse du circuit à des excitations spécifiques.

La réponse d'un circuit électrique, suite à l'application d'une excitation, comprend généralement un régime transitoire et un régime permanent.

- Durant le *régime transitoire*, les tensions et les courants du circuit évoluent avec le temps. Ce régime ne dure qu'un temps limité.
- Durant le *régime permanent*, les tensions et les courants du circuit n'évoluent plus et ils demeureront inchangés jusqu'à l'infini s'il n'y pas d'autre excitation.

Le régime transitoire existe toujours dans les circuits contenant des éléments R, L, C et excités par une source quelconque. Par contre, le régime permanent existe seulement avec les excitations qui sont constantes (excitation continue) ou périodiques.

L'analyse transitoire consiste à déterminer la réponse d'un circuit électrique suite à l'application d'une excitation.

L'analyse du régime permanent consiste à déterminer la réponse d'un circuit électrique après que les transitoires soient terminés.

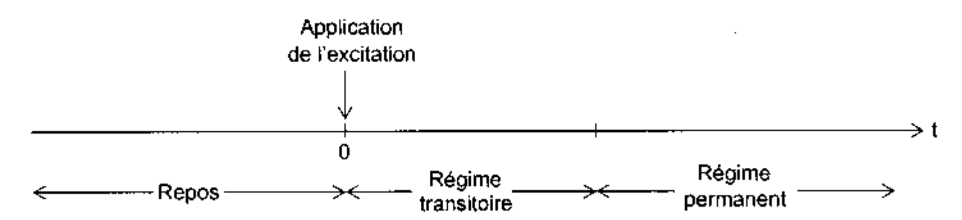


Figure 5-2 Régime transitoire et régime permanent.

5.2 Méthodes d'analyse transitoire des circuits électriques

Pour déterminer la réponse d'un circuit électrique, on peut utiliser une des méthodes suivantes.

• Analyse par équations différentielles:

On établit une équation différentielle qui relie la réponse y à l'excitation x:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0 x \tag{5-1}$$

où les coefficients a_n, ..., a_1, a_0, b_m, ..., b_1, b_0 sont des constantes.

La résolution de cette équation différentielle donnera la réponse y.

• Analyse par variables d'états:

On établit les équations d'état du circuit qui sont des équations différentielles du premier ordre écrites sous forme matricielle:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}+\mathbf{Bu} \tag{5-2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}+\mathbf{Du} \tag{5-3}$$

où

$\mathbf{x}$ = vecteur d'état = $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$

$\mathbf{y}$ = vecteur des sorties = $[y_1\ y_2\ \ldots\ y_m]^T$

$\mathbf{u}$ = vecteur des entrées = $[u_1\ u_2\ \ldots\ u_p]^T$

A = matrice n x n

B = matrice n x p

C = matrice m x n

D = matrice m x p

Ces équations relient les sorties **y** et les excitations **u**.

La résolution des équations d'état donnera les sorties **y**.

• Analyse par la transformation de Laplace:

La transformation de Laplace permet de transformer les éléments électriques ainsi que les tensions et courants du *domaine du temps* vers le *domaine de s*. On établit les équations d'équilibre dans le domaine de s, qui sont des équations algébriques.

La résolution de ces équations d'équilibre donnera la réponse **Y** dans le domaine de s. La transformation inverse de Laplace permet de retrouver la réponse y dans le domaine du temps.

• Simulation numérique:

De façon générale, la simulation numérique de circuits électriques consiste en la résolution numérique des équations d'état ou des équations nodales établies à l'aide de programmes de saisie de schéma.

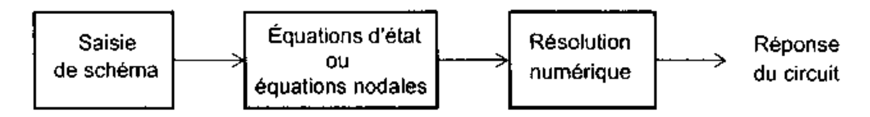


Figure 5-3 Simulation numérique de circuits électriques.

5.3 Analyse des circuits électriques par équations différentielles

5.3.1 Équations différentielles d'un circuit électrique

Dans un circuit électrique, les tensions dans les éléments sont reliées par des équations algébriques (loi des tensions de Kirchhoff) qui sont de la forme:

$$\sum_{k=1}^{N} v_k = v_s \tag{5-4}$$

où v_s est une combinaison linéaire des excitations.

De la même façon, les courants dans les éléments sont reliés par des équations algébriques (loi des courant de Kirchhoff) qui sont de la forme:

$$\sum_{k=1}^{M} i_k = i_s \tag{5-5}$$

où i_s est une combinaison linéaire des excitations.

Si le circuit ne contient que des éléments R, L, C, les tensions et les courants sont reliés par des équations suivantes:

$$v = Ri \qquad \text{pour une résistance} \tag{5-6}$$

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad \text{pour une inductance} \tag{5-7}$$

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \text{pour un condensateur.} \tag{5-8}$$

On peut déduire que dans un tel circuit, la réponse y est reliée à l'excitation x par une *équation différentielle* à coefficients constants.

De façon générale, l'équation différentielle qui relie la réponse y et l'excitation x d'un circuit électrique est de la forme suivante:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{5-9}$$

où les coefficients a_0, a_1, ..., a_n et b_0, b_1, ..., b_m sont des constantes qui dépendent des valeurs des éléments.

Exemple 5-1 Équation différentielle d'un circuit RLC

Considérons le circuit RLC série montré dans la figure 5-4.

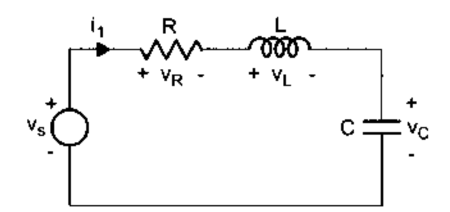


Figure 5-4 Circuit RLC série.

La source de tension v_s est l'excitation. Le courant i_1 est considéré comme la réponse du circuit.

On écrit l'équation de tensions dans la maille unique du circuit:

$$v_R + v_L + v_C = v_s \tag{5-10}$$

On remplace les relations v-i dans l'équation de tensions:

$$Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int i_1 dt = v_s \tag{5-11}$$

En dérivant les deux membres de l'équation, on obtient l'équation différentielle du deuxième ordre suivante:

$$L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}i_1 = \frac{dv_s}{dt} \tag{5-12}$$

Cette équation différentielle relie la réponse i_1 du circuit à l'excitation v_s. Pour une excitation v_s donnée, le courant i_1 est obtenu en résolvant cette équation.

5.3.2 Linéarité des circuits électriques

Nous pouvons démontrer qu'un circuit électrique *initialement au repos* (c'est à dire que les variables du circuit sont nulles avant l'instant $t = 0$) dont la réponse et l'excitation sont reliées par une équation différentielle à coefficients constants est *linéaire*.

Considérons par exemple un circuit électrique dont la réponse y est reliée à l'excitation x par une équation différentielle du premier ordre:

$$a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{5-13}$$

La réponse y_1 à une excitation x_1 est la solution de l'équation suivante:

$$a_1\frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 = b_1\frac{dx_1}{dt} + b_0 x_1 \tag{5-14}$$

La réponse y_2 à une excitation x_2 est la solution de l'équation suivante:

$$a_1\frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2 = b_1\frac{dx_2}{dt} + b_0 x_2 \tag{5-15}$$

On multiplie l'équation (5-14) par une constante A et l'équation (5-15) par une constante B. En additionnant les deux résultats, on obtient:

$$A\left\{a_1\frac{dy_1}{dt}+a_0y_1\right\}+B\left\{a_1\frac{dy_2}{dt}+a_0y_2\right\} = A\left\{b_1\frac{dx_1}{dt}+b_0x_1\right\}+B\left\{b_1\frac{dx_2}{dt}+b_0x_2\right\} \quad (5\text{-}16)$$

ou bien:

$$a_1\frac{d}{dt}\{Ay_1+By_2\}+a_0\{Ay_1+By_2\} = b_1\frac{d}{dt}\{Ax_1+Bx_2\}+b_0\{Ax_1+Bx_2\} \quad (5\text{-}17)$$

Cette équation démontre que (Ay_1+By_2) est la réponse du circuit à l'excitation (Ax_1+Bx_2). La linéarité du circuit est donc prouvée.

5.3.3 Propriétés des circuits électriques linéaires

Linéarité

Si «y_1 est la réponse à l'excitation x_1» et «y_2 est la réponse à l'excitation x_2», **alors** «(Ay_1+By_2) sera la réponse à l'excitation (Ax_1+Bx_2)», où A et B sont des constantes arbitraires.

Réponse à la dérivée et à l'intégrale d'une excitation

Si y est la réponse à l'excitation x, **alors**:

$$\frac{d^n y}{dt^n} \quad \text{sera la réponse à} \quad \frac{d^n x}{dt^n} \quad (5\text{-}18)$$

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \quad \text{sera la réponse à} \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad (5\text{-}19)$$

Réponse à une excitation retardée

Si y est la réponse à l'excitation x, **alors**:

$y(t-t_0)$ sera la réponse à $x(t-t_0)$

Réponse à la partie réelle (ou imaginaire) d'une excitation complexe

Si y est la réponse à l'excitation complexe x, **alors**:

$Re[y]$ sera la réponse à $Re[x]$

$Im[y]$ sera la réponse à $Im[x]$

y^* sera la réponse à x^*

5.3.4 Résolution des équations différentielles des circuits électriques

Considérons l'équation différentielle qui relie la réponse y et l'excitation x d'un circuit électrique initialement au repos (les tensions et courants du circuit sont nuls avant l'application de l'excitation):

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y = x \quad (5\text{-}20)$$

L'excitation est appliquée à un instant donné que l'on peut prendre comme l'origine du temps ($t = 0$). De cette façon, la fonction x est une fonction discontinue de la forme:

$x(t) = f(t)u(t)$.

Nous considérons donc deux zones distinctes: $t < 0$ et $t > 0$.

- Pour $t < 0$: La réponse y est égale à 0.

- Pour t > 0: La réponse y est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

- À l'instant t = 0, y et ses dérivées (jusqu'à ordre n-1) doivent être continues (c'est à dire qu'il n'y pas de changement brusque de valeur). Ces conditions aux limites permettront de déterminer la solution complète pour y.

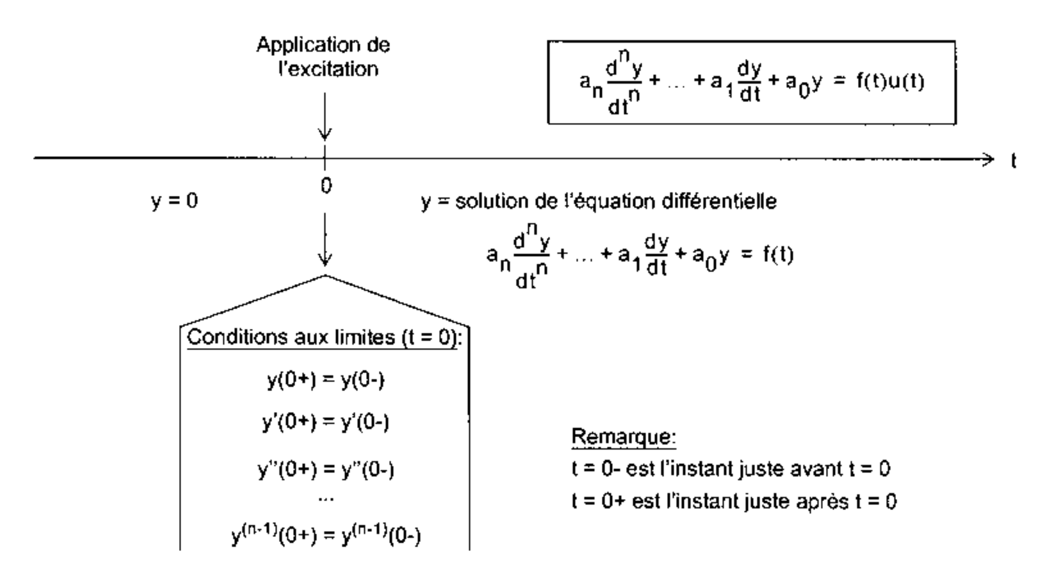


Figure 5-5 Solution des équations différentielles des circuits électriques.

Dans le cas où le deuxième membre de l'équation différentielle contient des dérivées de x, on appliquera le principe de superposition pour trouver la solution tel qu'illustré dans le tableau 5-1.

Équation différentielle	Solution
$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x$	z
$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x$	$b_0 z$
$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$	$b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z$
$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$	$b_m \frac{d^m z}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z$

Tableau 5-1 Solution des équations différentielles avec des dérivées au deuxième membre.

5.4 Circuits du premier ordre

Un circuit du premier ordre est un circuit dont la réponse y et l'excitation x sont reliées par une équation différentielle du premier ordre:

$$a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = b_1\frac{dx}{dt} + b_0x \qquad (5\text{-}21)$$

où les coefficients a_1, a_0, b_1, b_0 sont des constantes.

Le *circuit de base* d'un circuit du premier ordre prend une des deux formes suivantes:

- circuit RC: une résistance et un condensateur
- circuit RL: une résistance et une inductance

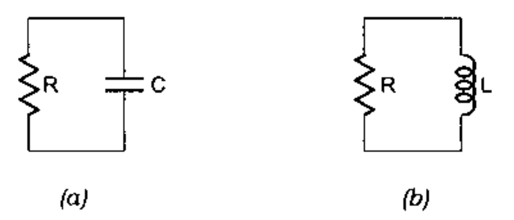


Figure 5-6 Circuit de base d'un circuit du premier ordre. (a) Circuit RC. (b) Circuit RL.

La figure 5-7 montre quelques exemples de circuits du premier ordre.

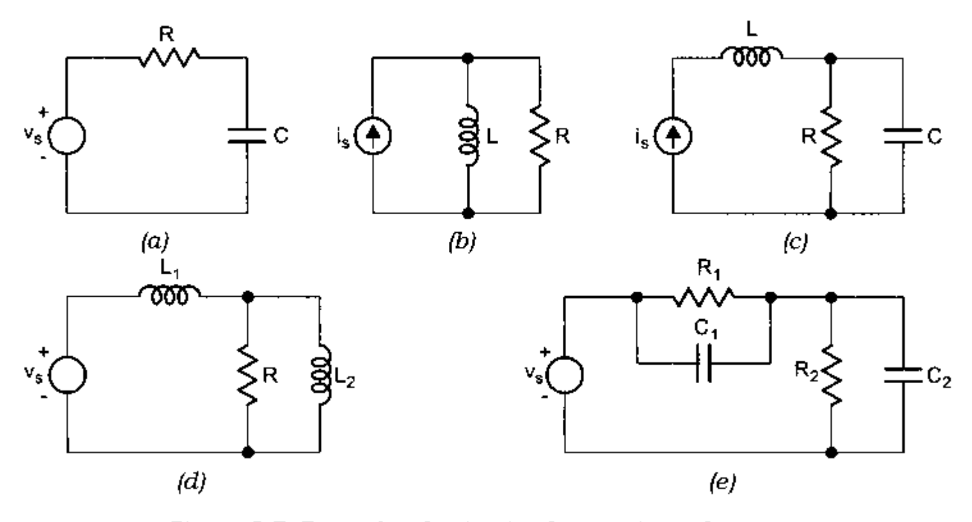


Figure 5-7 Exemples de circuits du premier ordre.

5.4.1 Réponse d'un circuit RC à un échelon

Considérons le circuit RC montré dans la figure 5-8.

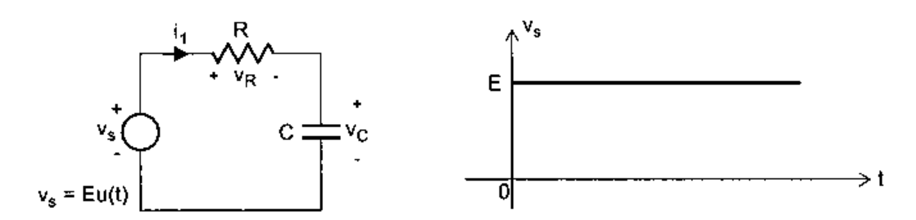


Figure 5-8 Circuit RC excité par une source échelon.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant t = 0.

La source de tension $v_s = Eu(t)$, qui représente une source de tension continue E appliquée à t = 0, est l'excitation du circuit.

Le courant i_1 et les tension v_R et v_C sont les réponses du circuit.

Nous considérons en particulier la tension v_C aux bornes du condensateur.

Nous écrivons l'équation d'équilibre du circuit:

$$v_R + v_C = v_s \tag{5-22}$$

ou bien:

$$RC\frac{d}{dt}[v_C] + v_C = Eu(t) \tag{5-23}$$

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à t = 0. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: t < 0 et t > 0.

- <u>Pour t < 0</u>: le circuit est au repos. Donc $v_C = 0$.
- <u>Pour t > 0</u>: v_C est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$RC\frac{d}{dt}[v_C] + v_C = E \tag{5-24}$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes:

$$v_C = v_{CP} + v_{CH} \tag{5-25}$$

où v_{CP} est une *solution particulière* de l'équation (5-24) et v_{CH} est la solution de *l'équation homogène* $RC\frac{d}{dt}[v_C] + v_C = 0$.

La solution particulière de l'équation (5-24) est: $v_{CP} = E$

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante: $v_{CH} = Ae^{s_1 t}$, où A et s_1 sont des constantes à déterminer.

La constante s_1 peut être déterminée en remplaçant $v_{CH} = Ae^{s_1 t}$ dans l'équation homogène:

$$RC\frac{d}{dt}[Ae^{s_1t}] + Ae^{s_1t} = 0 \tag{5-26}$$

ou bien:

$$RCs_1 + 1 = 0 \tag{5-27}$$

Cette dernière équation est connue comme *l'équation caractéristique* du circuit.

La solution $s_1 = -\frac{1}{RC}$ s'appelle la *fréquence naturelle* du circuit.

La quantité $\tau = \frac{1}{|s_1|} = RC$ a comme dimension «seconde» et est définie comme la *constante de temps* du circuit.

Alors, la solution pour v_C pour l'intervalle $t > 0$ est:

$$v_C = E + Ae^{\frac{-t}{RC}} \tag{5-28}$$

La constante A est déterminée par la *condition initiale* de v_C (c'est à dire la valeur de v_C à l'instant $t = 0+$)

On définit:

$t = 0-$ est l'instant *juste avant* $t = 0$,

$t = 0+$ est l'instant *juste après* $t = 0$.

Nous avons:

$v_C(0-) = 0$ parce que le circuit est initialement au repos.

En examinant l'équation (5-23), on constate que le membre droit [Eu(t)] est discontinu à $t = 0$. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à $t = 0$. Cette discontinuité doit se trouver uniquement dans le terme $RC\frac{d}{dt}[v_C]$ parce que si v_C est discontinue, sa dérivée $\frac{d}{dt}[v_C]$ sera infinie (ce qui n'est pas conforme).

Donc, on conclut qu'à l'instant $t = 0$, v_C est continue et sa dérivée $\frac{d}{dt}[v_C]$ est discontinue.

Alors, nous avons: $v_C(0+) = v_C(0-) = 0$

En remplaçant $t = 0$ dans l'expression $v_C = E + Ae^{\frac{-t}{RC}}$, on obtient:

$v_C(0+) = E + A = 0$

On déduit: $A = -E$

Finalement, la solution pour tout t est:

$$v_C = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) & \text{pour } t > 0 \end{cases} \tag{5-29}$$

On peut aussi exprimer v_C sous une forme plus compacte:

$$v_C = E\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)u(t) \tag{5-30}$$

Le courant i_1 peut être calculé à partir de v_C:

$$i_1 = C\frac{d}{dt}[v_C] = C\frac{d}{dt}\left\{E\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)u(t)\right\} = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{RC}}u(t) \tag{5-31}$$

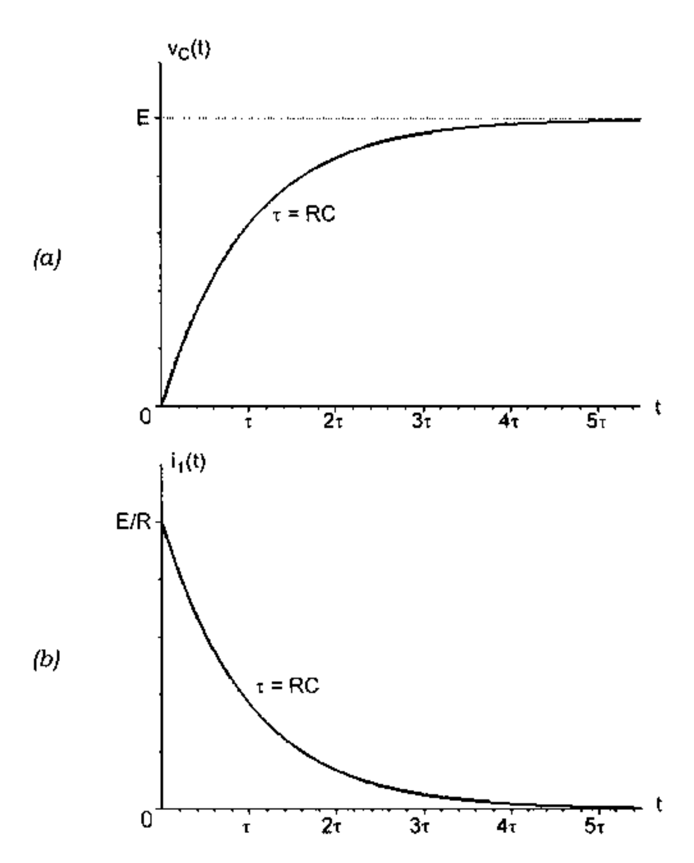


Figure 5-9 Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension Eu(t).
(a) Tension aux bornes du condensateur. (b) Courant dans le condensateur.

5.4.2 Réponse d'un circuit RL à un échelon

Considérons le circuit RL montré dans la figure 5-10.

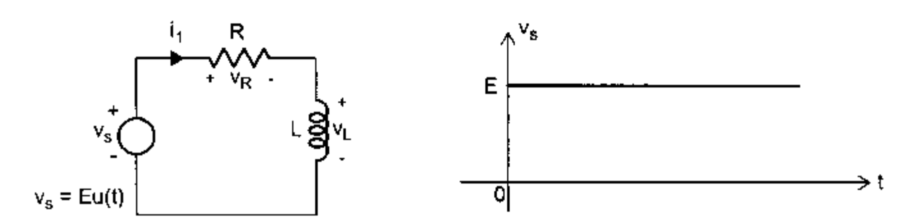


Figure 5-10 Circuit RL excité par une source échelon.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant t = 0.

La source de tension $v_s = Eu(t)$, qui représente une source de tension continue E appliquée à t = 0, est l'excitation du circuit.

Le courant i_1 et les tension v_R et v_L sont les réponses du circuit.

Nous considérons en particulier le courant i_1 dans l'inductance L.

Nous écrivons l'équation d'équilibre du circuit:

$$v_R + v_L = v_s \qquad (5\text{-}32)$$

ou bien:

$$L\frac{d}{dt}[i_1] + Ri_1 = Eu(t) \qquad (5\text{-}33)$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire peut être effectuée de façon identique au cas précédent.

- pour t < 0: $i_1 = 0$
- pour t > 0: i_1 est la solution de l'équation $L\frac{d}{dt}[i_1] + Ri_1 = E$

Nous avons: $i_1 = i_{1P} + i_{1H}$

avec: $i_{1P} = \frac{E}{R}$ est la solution particulière et $i_{1H} = Ae^{s_1t}$ est la solution homogène.

La fréquence naturelle s_1 est la solution de l'équation caractéristique:

$$Ls_1 + R = 0 \qquad (5\text{-}34)$$

Alors: $s_1 = \frac{-R}{L}$

La constante A est déterminée par la condition initiale de i_1:

$$i_1(0+) = i_1(0-) = 0 = \frac{E}{R} + A \qquad (5\text{-}35)$$

Donc: $A = \frac{-E}{R}$

Finalement, la solution pour tout t est:

$$i_1 = \frac{E}{R}\left[1 - e^{\frac{-R}{L}t}\right]u(t) \tag{5-36}$$

La tension aux bornes de l'inductance est calculée à partir de i_1:

$$v_L = L\frac{d}{dt}\{i_1\} = L\frac{d}{dt}\left\{\frac{E}{R}\left[1 - e^{\frac{-R}{L}t}\right]u(t)\right\} = Ee^{\frac{-R}{L}t}u(t) \tag{5-37}$$

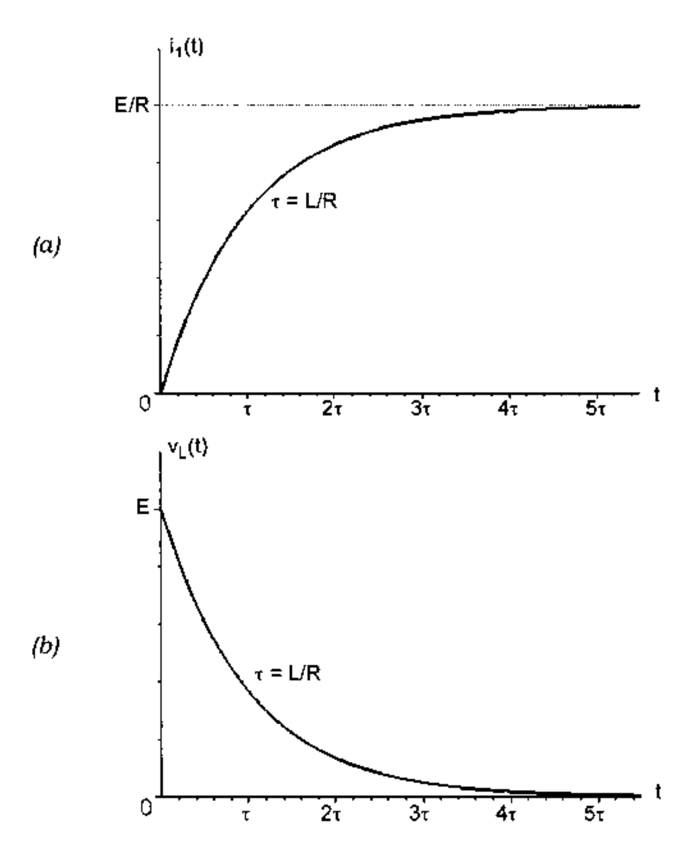


Figure 5-11 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension Eu(t).
(a) Courant dans l'inductance. (b) Tension aux bornes de l'inductance.

5.4.3 Comportement d'un condensateur et d'une inductance à t = 0+ et à t → ∞ dans un circuit excité par une source échelon

En examinant la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension, on constate que:

- à t = 0+ un condensateur se comporte comme un court-circuit
- à t → ∞ un condensateur se comporte comme un circuit ouvert

En examinant la réponse d'un circuit RL à un échelon de tension, on constate que:

- à t = 0+ une inductance se comporte comme un circuit ouvert
- à t → ∞ une inductance se comporte comme un court-circuit

Utilisant ces observations, on peut déterminer la réponse d'un circuit du premier ordre à une excitation échelon simplement *par inspection*. Il suffit de retenir les points suivants:

a) La réponse d'un circuit du premier ordre (RC ou RL) à une excitation échelon est de la forme suivante:

$$y(t) = \left[A + Be^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \qquad (5\text{-}38)$$

où A et B sont des constantes, et τ est la *constante de temps* du circuit.

b) La constante de temps τ est déterminée en utilisant le circuit de base:

$\tau = RC$ pour un circuit RC

$\tau = L/R$ pour un circuit RL

c) Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiale ($t = 0+$) et finale ($t \to \infty$) de la réponse y(t).

- la *condition initiale* pour y(t) est obtenue en remplaçant chaque condensateur par un court-circuit et chaque inductance par un circuit ouvert:

  $y(0+) = A + B$

- la *condition finale* pour y(t) est obtenue en remplaçant chaque condensateur par un circuit ouvert et chaque inductance par un court-circuit.

  $y(\infty) = A$

Exemple 5-2 Analyse d'un circuit du 1er ordre par inspection

Soit le circuit RC montré dans la figure 5-12.

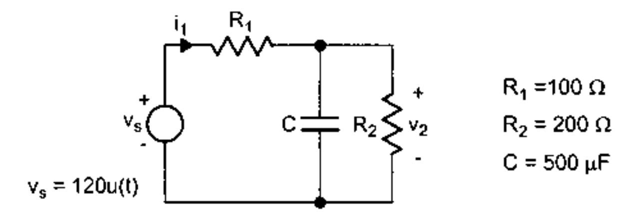


Figure 5-12 Circuit du premier ordre excité par une source échelon.

On désire déterminer le courant i_1 et la tension v_2.

On obtient le circuit de base en annulant la source de tension v_s.

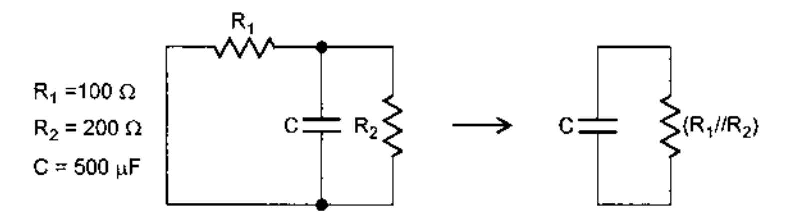


Figure 5-13 Circuit de base.

La constante de temps du circuit est:

$$\tau = (R_1 \| R_2)C = (100 \| 200) \times 500 \times 10^{-6} = 33.33 \text{ ms}$$

Le courant $i_1(t)$ est de la forme suivante: $$i_1(t) = \left[A + Be^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$

La tension $v_2(t)$ est de la forme suivante: $$v_2(t) = \left[C + De^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$

Les constantes A, B, C, D sont déterminées par les conditions initiales et finales de i_1 et v_2. À t = 0+, on remplace le condensateur par un court-circuit. À $t \to \infty$, on remplace le condensateur par un circuit ouvert. Les circuits équivalents initial et final sont montrés dans la figure 5-14.

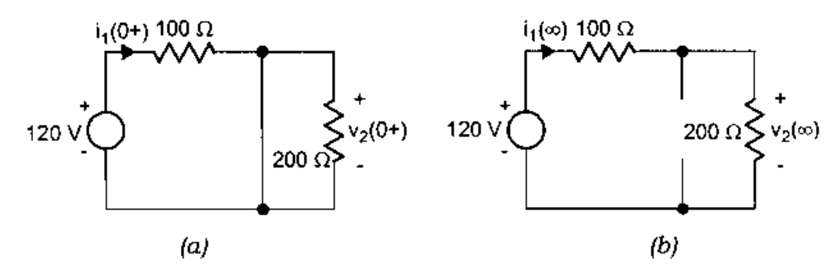


Figure 5-14 Circuits équivalents.
(a) À t = 0+. (b) À t = ∞.

À t = 0+, le courant i_1 et la tension v_2 sont:

$$i_1(0+) = 120/100 = 1.2 \text{ A}$$
$$v_2(0+) = 0 \text{ V}$$

À $t \to \infty$, le courant i_1 et la tension v_2 sont:

$$i_1(\infty) = 120/300 = 0.4 \text{ A}$$
$$v_2(\infty) = \frac{200}{200+100} \times 120\text{V} = 80\text{ V}.$$

En remplaçant t = 0 et t = ∞ dans les expressions de $i_1(t)$ et $v_2(t)$, on obtient les relations suivantes:

$$i_1(0+) = A + B = 1.2$$
$$i_1(\infty) = A = 0.4$$
$$v_2(0+) = C + D = 0$$
$$v_2(\infty) = C = 80$$

On déduit: B = 0.8 et D = -80

Alors, la solution pour i_1 et v_2 sont:

$$i_1(t) = \left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \quad \text{avec } \tau = 33.33 \text{ ms},$$

et $$v_2(t) = \left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \quad \text{avec } \tau = 33.33 \text{ ms}.$$

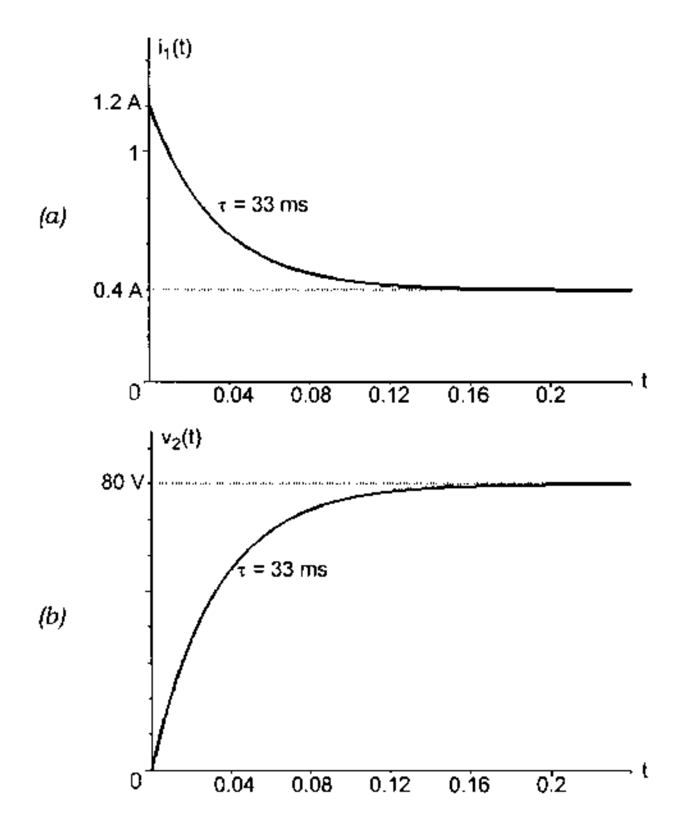


Figure 5-15 Réponse du circuit RC de l'exemple 5-2 à un échelon 120u(t). (a) Courant dans la source. (b) Tension aux bornes de la résistance R_2.

5.4.4 Réponse d'un circuit du premier ordre à une impulsion ou une rampe

La réponse d'un circuit linéaire à une impulsion (ou une rampe) peut être obtenue en dérivant (ou en intégrant) sa réponse à un échelon. Ce résultat découle directement des propriétés des circuits linéaires.

Excitation	Réponse
u(t)	y(t)
$\delta(t) = \frac{d}{dt}[u(t)]$	$\frac{d}{dt}[y(t)]$
$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt$	$\int_{-\infty}^{t} y(t)dt$

Tableau 5-2 Propriétés des circuits linéaires.

Exemple 5-3 Réponse d'un circuit du 1er ordre à une impulsion et à une rampe

Considérons le circuit de l'exemple 5-2. Nous allons déterminer le courant $i_1(t)$ et la tension $v_2(t)$ pour $v_s = 120\delta(t)$ et $v_s = 2400r(t)$.

Cas où $v_s = 120\delta(t)$

Dans l'exemple 5-2, on a déjà obtenu les réponses à un échelon de 120 V:

$$i_1(t) = \left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \text{ et } v_2(t) = \left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \text{ avec } \tau = 33.33 \text{ ms.}$$

Pour obtenir les réponses à une impulsion $120\delta(t)$, on dérive simplement les expressions de $i_1(t)$ et $v_2(t)$.

$$i_1(t) = \frac{d}{dt}\left\{\left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\} = 1.2\delta(t) - \frac{0.8}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}u(t) = 1.2\delta(t) - 24e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

$$v_2(t) = \frac{d}{dt}\left\{\left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\} = \frac{80}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}u(t) = 2400e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

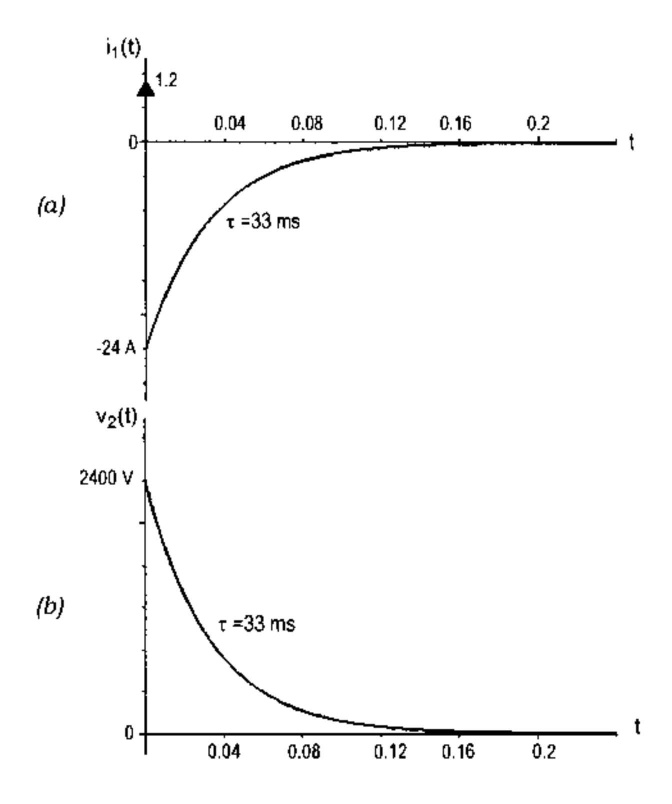


Figure 5-16 Réponse du circuit RC de l'exemple 5-2 à une impulsion $120\delta(t)$. (a) Courant dans la source. (b) Tension aux bornes de la résistance R_2.

Cas où v_s = 2400r(t)

Les réponses à une rampe de 2400r(t) sont obtenues en intégrant les expressions de $i_1(t)$ et $v_2(t)$ obtenues pour une excitation de 120u(t) et en multipliant le résultat par 20.

$$i_1(t) = 20\int_{-\infty}^{t}\left\{\left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\}dt = \left[8t + 0.533\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right]u(t)$$

$$v_2(t) = 20\int_{-\infty}^{t}\left\{\left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\}dt = \left[1600t - 53.334\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right]u(t)$$

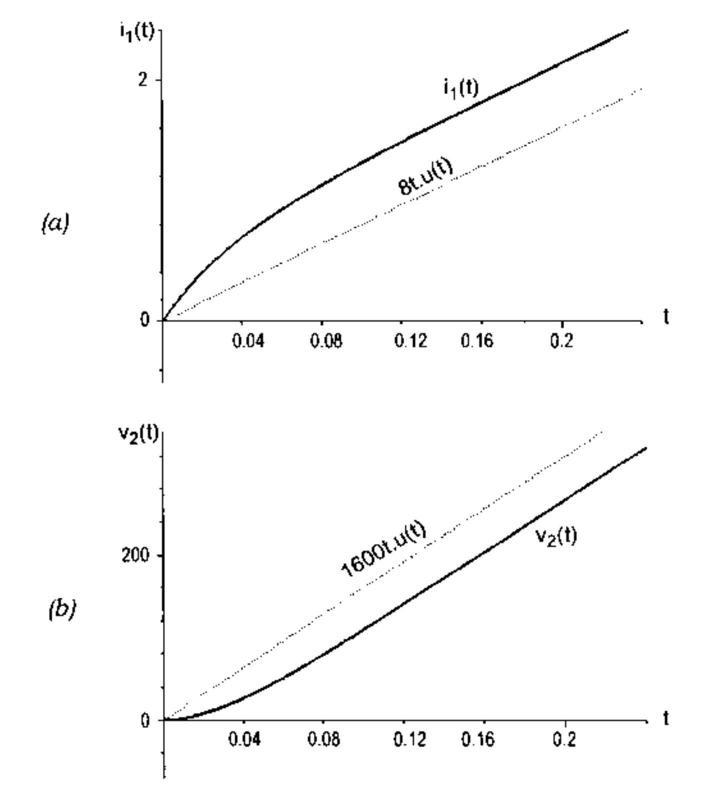


Figure 5-17 Réponse du circuit RC de l'exemple 5-2 à une rampe 2400r(t).
(a) Courant dans la source. (b) Tension aux bornes de la résistance R_2.

5.4.5 Réponse d'un circuit du premier ordre à une excitation apériodique

En général, on peut décomposer une excitation apériodique en une somme de fonctions singulières (échelon, rampe, ...) et appliquer le principe de superposition pour déterminer la réponse. Cette approche est illustrée dans l'exemple 5-4.

Exemple 5-4 Réponse d'un circuit du 1er ordre à une impulsion carrée

On considère le circuit RC de l'exemple 5-2. On désire déterminer le courant i_1 et la tension v_1 lorsque la source de tension v_s est une impulsion carrée d'amplitude 180 V et de largeur 50 ms comme illustrée dans la figure 5-18.

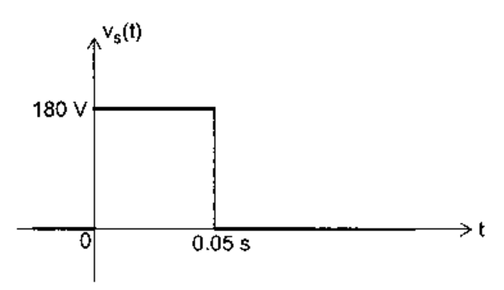


Figure 5-18 Impulsion carrée de l'exemple 5-4.

On peut décomposer v_s en une somme de deux échelons:

$$v_s(t) = 180u(t) - 180u(t-0.05)$$

Dans l'exemple 5-2, avec une source $v_s = 120u(t)$, nous avons obtenu:

$$i_1(t) = \left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \text{ et } v_2(t) = \left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) \text{ avec } \tau = 33.33 \text{ ms.}$$

En utilisant les propriétés des circuits linéaires, nous pouvons déterminer i_1 et v_2 pour ce cas où $v_s(t) = 180u(t) - 180u(t-0.05)$ (que nous appelons i_{1x} et v_{2x}):

$$i_{1x} = \frac{180}{120}i_1(t) - \frac{180}{120}i_1(t-0.05)$$

$$v_{2x} = \frac{180}{120}v_2(t) - \frac{180}{120}v_2(t-0.05)$$

Alors:

$$i_{1x} = 1.5\left\{\left[0.4 + 0.8e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\} - 1.5\left\{\left[0.4 + 0.8e^{\frac{-(t-0.05)}{\tau}}\right]u(t-0.05)\right\}$$

$$i_{1x} = \left[0.6 + 1.2e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) - \left[0.6 + 1.2e^{\frac{-(t-0.05)}{\tau}}\right]u(t-0.05) \qquad \text{avec } \tau = 33 \text{ ms}$$

et:

$$v_{2x} = 1.5\left\{\left[80 - 80e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\right\} - 1.5\left\{\left[80 - 80e^{\frac{-(t-0.05)}{\tau}}\right]u(t-0.05)\right\}$$

$$v_{2x} = \left[120 - 120e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t) - \left[120 - 120e^{\frac{-(t-0.05)}{\tau}}\right]u(t-0.05) \qquad \text{avec } \tau = 33 \text{ ms}$$

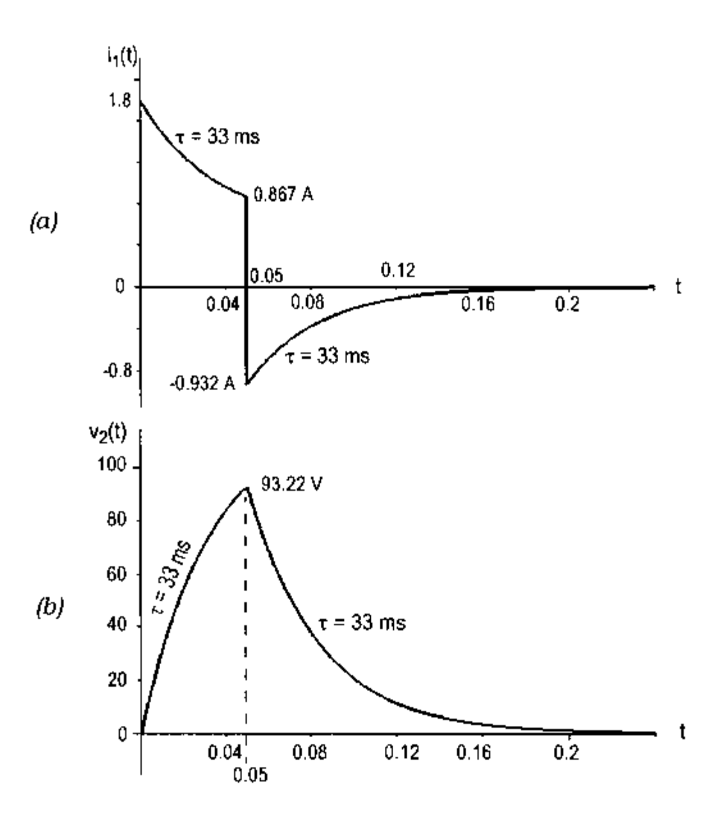


Figure 5-19 Réponse du circuit RC de l'exemple 5-2 à une impulsion carrée d'amplitude 180 V et de largeur 50 ms.
(a) Courant dans la source. (b) Tension aux bornes de la résistance R_2.

5.4.6 Réponse d'un circuit du premier ordre à une excitation sinusoïdale

Considérons un circuit RC initialement au repos montré dans la figure 5-20.

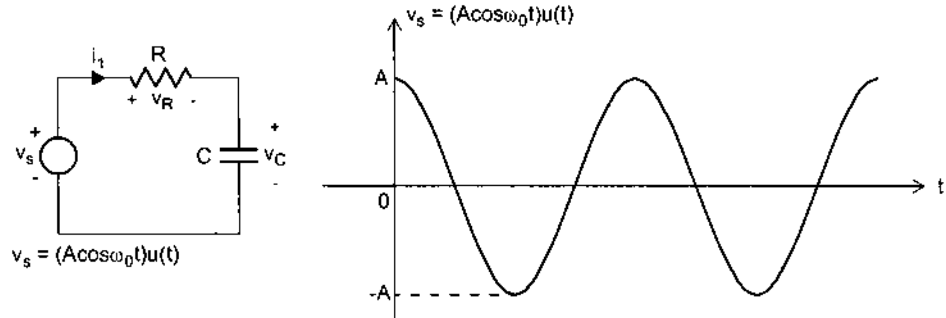


Figure 5-20 Circuit RC excité par une source sinusoïdale.

L'excitation v_s est une fonction sinusoïdale appliquée brusquement à t = 0:

$$v_s = (A\cos\omega_0 t)u(t)$$

L'équation différentielle qui relie la tension v_C à l'excitation v_s s'écrit:

$$RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = v_s = (A\cos\omega_0 t)u(t) \tag{5-39}$$

Nous pouvons exprimer v_s comme la partie réelle d'une fonction exponentielle complexe:

$$v_s = A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\}$$

L'équation (5-39) devient:

$$RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\} \tag{5-40}$$

Pour résoudre cette équation différentielle linéaire, nous résolvons en premier lieu la même équation mais avec le deuxième membre égal à $e^{j\omega_0 t}u(t)$:

$$RC\frac{d}{dt}v_X + v_X = e^{j\omega_0 t}u(t) \tag{5-41}$$

La tension v_C sera obtenue ensuite par la relation suivante: $v_C = A \cdot \mathrm{Re}\{v_X\}$

Solution pour v_X:

- pour $t < 0$: $v_X = 0$
- pour $t > 0$: v_X est la solution de l'équation suivante:

$$RC\frac{d}{dt}v_X + v_X = e^{j\omega_0 t} \tag{5-42}$$

La solution v_X est la somme de la solution particulière v_{XP} et la solution homogène v_{XH}: $v_X = v_{XP} + v_{XH}$

- La solution particulière v_{XP} est $v_{XP} = Be^{j\omega_0 t}$, où B est une constante à déterminer.

En remplaçant $v_{XP} = Be^{j\omega_0 t}$ dans l'équation (5-42), on obtient:

$$RC\frac{d}{dt}\left\{Be^{j\omega_0 t}\right\} + Be^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \tag{5-43}$$

ou bien:

$$(RCj\omega_0 + 1)Be^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \tag{5-44}$$

On déduit:

$$B = \frac{1}{RCj\omega_0 + 1} \tag{5-45}$$

- La solution homogène v_{XH} est la solution de l'équation homogène $RC\frac{d}{dt}v_{XH} + v_{XH} = 0$.

Nous avons:

$$v_{XH} = De^{s_1 t} \tag{5-46}$$

où:

- D est une constante déterminée par la condition initiale de v_X,
- s_1 est la fréquence naturelle du circuit, qui est la racine de l'équation caractéristique $RCs + 1 = 0$. Donc $s_1 = -1/RC$.

Alors, pour t > 0, la solution v_X est:

$$v_X = De^{\frac{-t}{RC}} + \frac{1}{RCj\omega_0 + 1}e^{j\omega_0 t} \tag{5-47}$$

À t = 0, la variable v_X est continue:

$$v_X(0+) = v_X(0-) = 0 \tag{5-48}$$

En remplaçant t = 0 dans l'expression de v_X, on obtient:

$$D + \frac{1}{RCj\omega_0 + 1} = 0 \tag{5-49}$$

On déduit:

$$D = \frac{-1}{RCj\omega_0 + 1} \tag{5-50}$$

Finalement, la solution v_X pour tout t s'écrit:

$$v_X = \frac{1}{RCj\omega_0 + 1}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{\frac{-t}{RC}}\right)u(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}}e^{-j\phi_0}\right)\left(e^{j\omega_0 t} - e^{\frac{-t}{RC}}\right)u(t) \tag{5-51}$$

avec $\phi_0 = \operatorname{atan}(RC\omega_0)$

La tension v_C est donnée par la relation suivante:

$$v_C = A \cdot \operatorname{Re}\{v_X\} = \frac{A}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}}\left[\cos(\omega_0 t - \phi_0) - \cos\phi_0 e^{\frac{-t}{RC}}\right]u(t) \tag{5-52}$$

Exemple 5-5 Réponse d'un circuit RL à une excitation sinusoïdale

Soit le circuit RL montré dans la figure 5-21.

L'équation différentielle qui relie i_1 à v_s s'écrit:

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = v_s = 50\cos(2000\pi t)u(t) = 50 \cdot \operatorname{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\} \tag{5-53}$$

avec $\omega_0 = 2000\pi$ rad/s.

Nous résolvons en premier lieu l'équation suivante:

$$L\frac{di_X}{dt} + Ri_X = e^{j\omega_0 t}u(t) \tag{5-54}$$

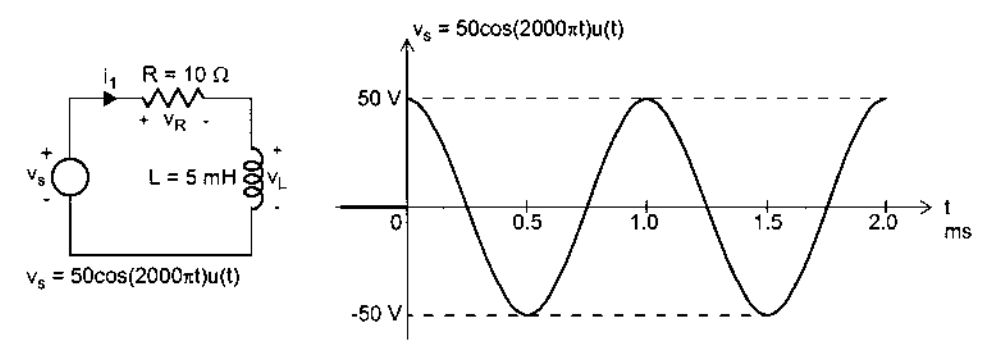


Figure 5-21 Circuit RL excité par une source sinusoïdale.

Pour $t < 0$, le courant i_X est égal à zéro.

Pour $t > 0$, le courant i_X est $i_X = i_{XP} + i_{XH}$, avec:

$$i_{XP} = \frac{1}{Lj\omega_0 + R}e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{10 + j31.416}e^{j2000\pi t} = 0.0303e^{-j1.263}e^{j2000\pi t}$$

et $$i_{XH} = \frac{-1}{Lj\omega_0 + R}e^{\frac{-Rt}{L}} = -0.0303e^{-j1.263}e^{-2000t}.$$

La solution pour i_X pour tout t est:

$$i_X = 0.0303e^{-j1.263}[e^{j2000\pi t} - e^{-2000t}]u(t) \quad (5\text{-}55)$$

Le courant i_1 est donné par la relation suivante:

$$i_1 = 50 \cdot \text{Re}\{i_X\} = 50 \cdot \text{Re}\{0.0303e^{-j1.263}[e^{j2000\pi t} - e^{-2000t}]u(t)\} \quad (5\text{-}56)$$

$$i_1 = [1.515\cos(2000\pi t - 1.263) - 0.4595e^{-2000t}]u(t) \quad (5\text{-}57)$$

On peut distinguer dans l'expression de $i_1(t)$ deux parties:

Partie A: $[1.515\cos(2000\pi t - 1.263)]u(t)$ réponse forcée

Partie B: $[-0.4595e^{-2000t}]u(t)$ réponse naturelle

La figure 5-22 montre le courant i_1 en fonction du temps.

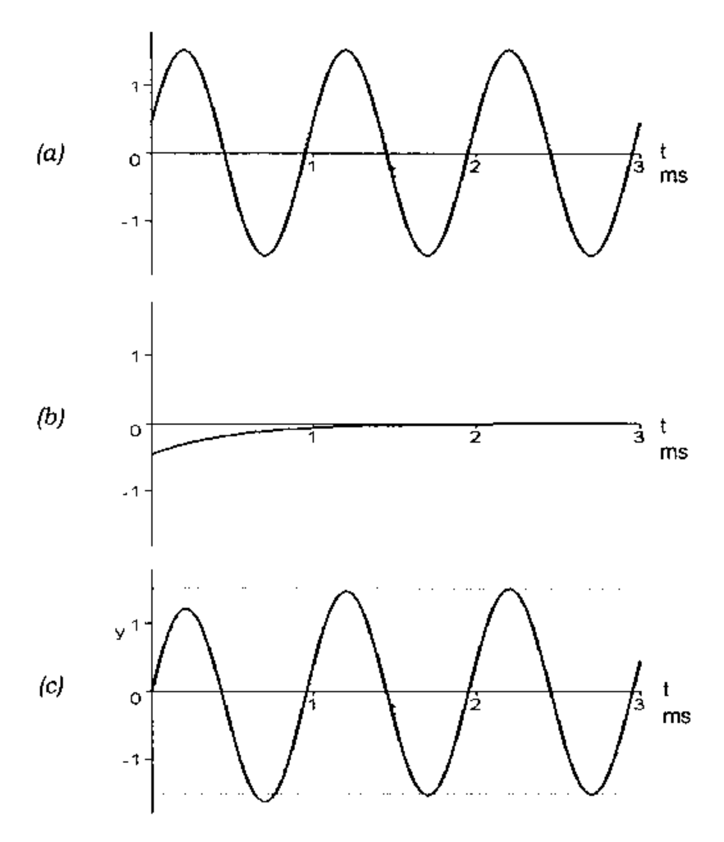


Figure 5-22 Réponse du circuit RL de l'exemple 5-5 à une tension sinusoïdale d'amplitude 50 V et de fréquence 1 kHz appliquée à t = 0. (a) Réponse forcée. (b) Réponse naturelle. (c) Réponse totale.

5.4.7 Discussion sur la réponse d'un circuit du premier ordre

On constate que la réponse d'un circuit du premier ordre à une excitation appliquée brusquement à t = 0 est constituée de deux parties distinctes: la réponse particulière et la réponse homogène.

• La réponse particulière est de même nature que l'excitation et est appelée aussi la *réponse forcée.*

Si l'excitation est une constante, la réponse particulière sera une constante. Si l'excitation est sinusoïdale, la réponse particulière sera aussi sinusoïdale de même fréquence.

• La réponse homogène est déterminée uniquement par la nature du circuit et est appelée aussi la *réponse naturelle.* Pour un circuit du premier ordre, la réponse naturelle est une exponentielle décroissante de constante de temps τ. La constante de temps d'un circuit du premier ordre est déterminée par les éléments du circuit:

- τ = RC pour un circuit RC
- τ = L/R pour un circuit RL

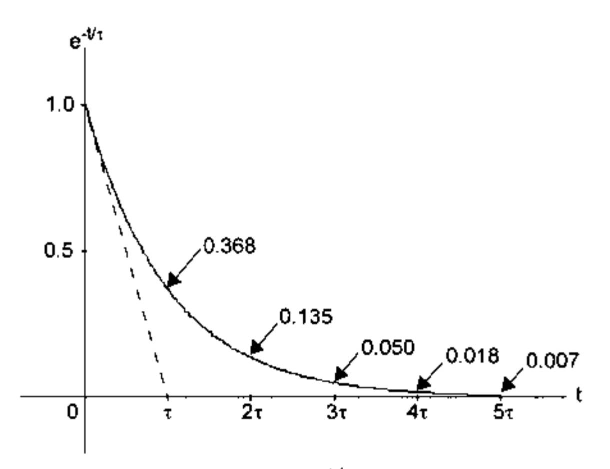


Figure 5-23 L'exponentielle $e^{-t/\tau}$ *en fonction du temps.*

Un certain temps après t = 0, la réponse naturelle devient négligeable. Pour le reste du temps, la réponse du circuit est constituée uniquement de la réponse forcée. Si l'excitation est une constante ou une fonction périodique, la réponse forcée persistera. Dans ce cas, on l'appelle la *réponse permanente*.

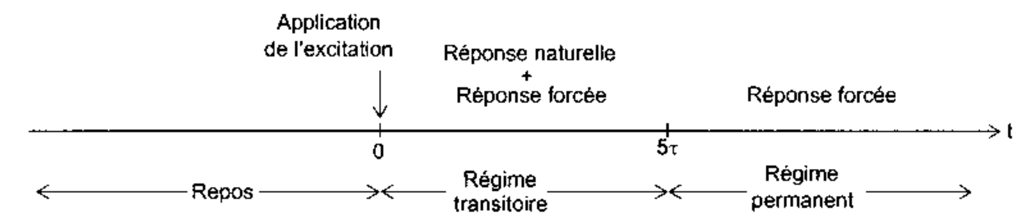


Figure 5-24 Régime transitoire et régime permanent dans un circuit du premier ordre.

On considère que la durée du régime transitoire dans un circuit du premier ordre est égale à 5τ.

5.5 Circuits du deuxième ordre

Un circuit du deuxième ordre est un circuit dont la réponse y et l'excitation x sont reliées par une équation différentielle du deuxième ordre:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = b_2\frac{d^2x}{dt^2} + b_1\frac{dx}{dt} + b_0x \qquad (5\text{-}58)$$

où les coefficients a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 sont des constantes.

Le *circuit de base* d'un circuit du deuxième ordre contient deux éléments accumulateurs d'énergie (L et C) et une ou plusieurs résistances. Il peut prend une des trois formes suivantes:

- circuit RCC: deux condensateurs et des résistances.
- circuit RLL: deux inductances et des résistances.
- circuit RLC: une inductance, un condensateur et des résistances.

La figure 5-25 montre quelques exemples de circuits du deuxième ordre.

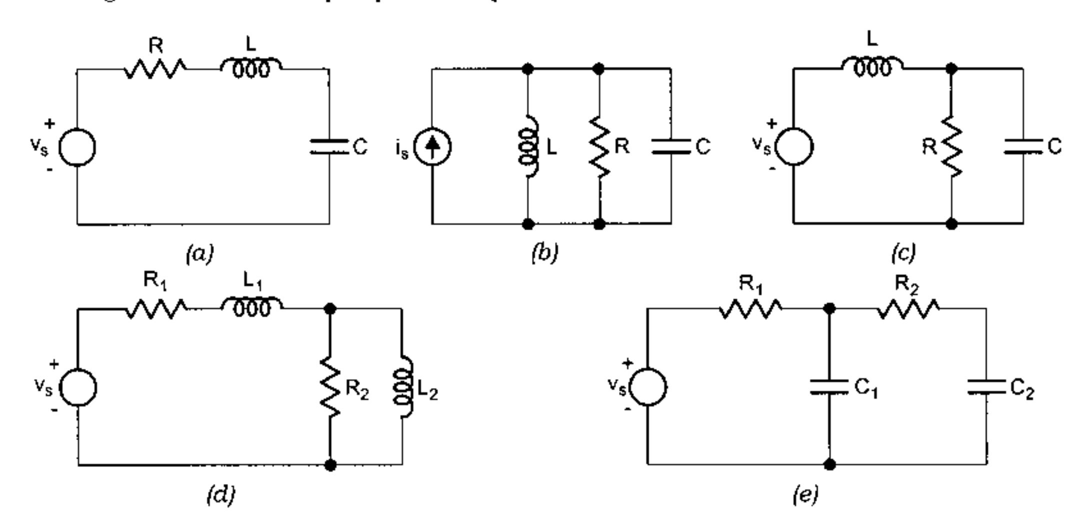


Figure 5-25 Exemples de circuits du deuxième ordre.

L'analyse d'un circuit du deuxième ordre s'effectue de la même façon que les circuits du premier ordre.

5.5.1 Réponse d'un circuit RCC à un échelon

Considérons le circuit RCC montré dans la figure 5-26.

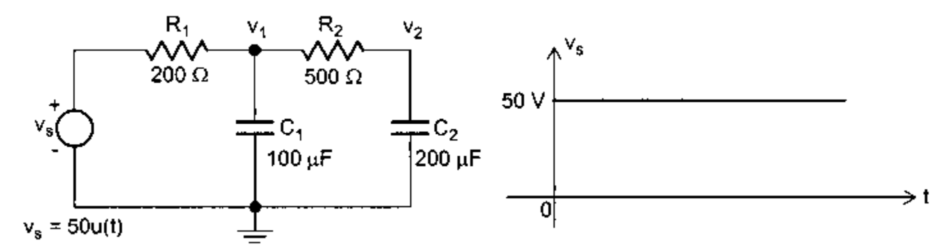


Figure 5-26 Circuit RCC excité par une source échelon.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant t = 0.

La source de tension v_s = 50u(t) représente une source de tension continue de 50 V appliquée à t = 0.

Les tensions v_1 et v_2 aux bornes des condensateurs sont définies comme les *tensions nodales* du circuit.

Équation différentielle

On établit les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + C_1 s & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + C_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 v_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}59)$$

En résolvant l'équation matricielle (5-59), on obtient:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + C_1 s & G_1 v_s \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + C_1 s & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + C_2 s \end{vmatrix}} = \frac{G_1 G_2 v_s}{C_1 C_2 s^2 + (G_1 C_2 + G_2 C_2 + G_2 C_1)s + G_1 G_2}$$

On déduit:

$$\{C_1 C_2 s^2 + (G_1 C_2 + G_2 C_2 + G_2 C_1)s + G_1 G_2\} v_2 = G_1 G_2 v_s \tag{5-60}$$

En remplaçant l'opérateur s par $\frac{d}{dt}$ et l'opérateur s^2 par $\frac{d^2}{dt^2}$, on obtient l'équation différentielle qui relie la tension v_2 à l'excitation v_s:

$$C_1 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (G_1 C_2 + G_2 C_2 + G_2 C_1)\frac{dv_2}{dt} + G_1 G_2 v_2 = G_1 G_2 v_s \tag{5-61}$$

Avec les valeurs numériques, on obtient:

$$0.002 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 0.16 \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 50u(t) \tag{5-62}$$

Résolution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à t = 0. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: $t < 0$ et $t > 0$.

- Pour $t < 0$: le circuit est au repos. Donc $v_2 = 0$.
- Pour $t > 0$: v_2 est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$0.002 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 0.16 \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 50 \tag{5-63}$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes: $v_2 = v_{2P} + v_{2H}$, où v_{2P} est une *solution particulière* de l'équation (5-63) et v_{2H} est la solution de *l'équation homogène* $0.002 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 0.16 \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0$.

La solution particulière est: $v_{2P} = 50$

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante: $v_{2H} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ où A_1, A_2, s_1 et s_2 sont des constantes à déterminer.

Les constantes s_1 et s_2 sont les *fréquences naturelles* du circuit, qui sont les racines de l'équation caractéristique: $0.002s^2 + 0.16s + 1 = 0$.

On a: $s_1 = -73.166$ et $s_2 = -6.834$.

Alors, la solution pour v_2 pour l'intervalle $t > 0$ est: $v_2 = 50 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$.

Conditions initiales

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide des *conditions initiales* (valeurs à t = 0^+) de v_2 et $\frac{dv_2}{dt}$.

Nous avons: $v_2(0-) = 0$ parce que le circuit est initialement au repos.

En examinant l'équation (5-62), on constate que le membre droit [50u(t)] est discontinu à t = 0. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à t = 0. Cette discontinuité doit se trouver uniquement dans le terme $\frac{d^2v_2}{dt^2}$.

Donc à l'instant t = 0, v_2 et sa dérivée $\frac{dv_2}{dt}$ sont continues, c'est à dire:

$$v_2(0+) = v_2(0-) = 0$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{t=0-} = 0$$

En remplaçant $v_2 = 50 + A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ dans ces deux conditions, on obtient

$$50 + A_1 + A_2 = 0 \tag{5-64}$$

$$s_1A_1 + s_2A_2 = 0 \tag{5-65}$$

Les solutions de ces équations sont:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} -50 & 1 \\ 0 & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} = \frac{50s_2}{s_1 - s_2} = 5.151 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -50 \\ s_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} = \frac{50s_1}{s_2 - s_1} = -55.151$$

Finalement, la solution pour tout t est:

$$v_2 = [50 + 5.151e^{-73.166t} - 55.151e^{-6.834t}]u(t) \tag{5-66}$$

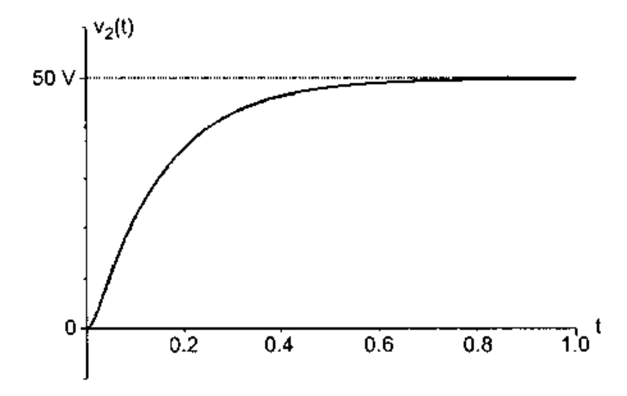


Figure 5-27 Réponse du circuit RCC de la figure 5-26 à un échelon de tension 50u(t). Tension v_2 aux bornes du condensateur C_2.

5.5.2 Réponse d'un circuit RLL à un échelon

Considérons le circuit RLL montré dans la figure 5-28.

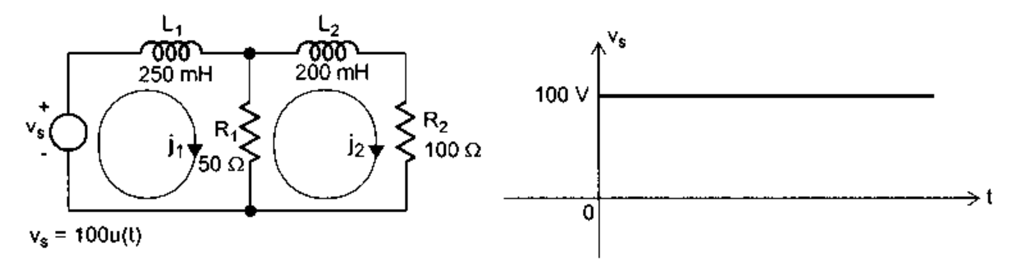


Figure 5-28 Circuit RLL excité par une source échelon.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant $t = 0$.

La source de tension $v_s = 100u(t)$ représente une source de tension continue de 100 V appliquée à $t = 0$.

Nous définissons les *courants circulatoires* j_1 et j_2 dans les deux mailles du circuit.

<u>Équation différentielle</u>

On établit les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des mailles:

$$\begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + L_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}67)$$

En résolvant l'équation matricielle (5-67), on obtient:

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + L_1 s & v_s \\ -R_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + L_1 s & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + L_2 s \end{vmatrix}} = \frac{R_1 v_s}{L_1 L_2 s^2 + (R_1 L_2 + R_1 L_1 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}$$

On déduit:

$$\{L_1 L_2 s^2 + (R_1 L_2 + R_1 L_1 + R_2 L_1)s + R_1 R_2\} j_2 = R_1 v_s \quad (5\text{-}68)$$

En remplaçant l'opérateur s par $\frac{d}{dt}$ et l'opérateur s^2 par $\frac{d^2}{dt^2}$, on obtient l'équation différentielle qui relie le courant j_2 à l'excitation v_s:

$$L_1 L_2 \frac{d^2 j_2}{dt^2} + (R_1 L_2 + R_1 L_1 + R_2 L_1)\frac{dj_2}{dt} + R_1 R_2 j_2 = R_1 v_s \quad (5\text{-}69)$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$0.001\frac{d^2 j_2}{dt^2} + 0.95\frac{dj_2}{dt} + 100 j_2 = 100u(t) \quad (5\text{-}70)$$

Résolution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à t = 0. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: t < 0 et t > 0.

- Pour t < 0: le circuit est au repos. Donc $j_2 = 0$.
- Pour t > 0: j_2 est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$0.001\frac{d^2j_2}{dt^2} + 0.95\frac{dj_2}{dt} + 100j_2 = 100 \tag{5-71}$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes:

$$j_2 = j_{2P} + j_{2H} \tag{5-72}$$

où j_{2P} est une *solution particulière* de l'équation (5-71) et j_{2H} est la solution de *l'équation homogène* $0.001\frac{d^2j_2}{dt^2} + 0.95\frac{dj_2}{dt} + 100j_2 = 0$.

La solution particulière de l'équation (5-71) est: $j_{2P} = 100/100 = 1$

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante: $j_{2H} = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$, où A_1, A_2, s_1 et s_2 sont des constantes à déterminer.

Les constantes s_1 et s_2 sont les *fréquences naturelles* du circuit, qui sont les racines de l'équation caractéristique: $0.001s^2 + 0.95s + 100 = 0$

On a: $s_1 = -829.436$ et $s_2 = -120.564$.

Alors, la solution pour v_2 pour l'intervalle t > 0 est: $j_2 = 1 + A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$

Conditions initiales

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide des *conditions initiales* (valeurs à $t = 0^+$) de j_2 et $\frac{dj_2}{dt}$.

Nous avons: $j_2(0-) = 0$ parce que le circuit est initialement au repos.

En examinant l'équation (5-70), on constate que le membre droit [100u(t)] est discontinu à t = 0. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à t = 0. Cette discontinuité doit se trouver uniquement dans le terme $\frac{d^2j_2}{dt^2}$.

Donc à l'instant t = 0, j_2 et sa dérivée $\frac{dj_2}{dt}$ sont continues, c'est à dire:

$$j_2(0+) = j_2(0-) = 0 \tag{5-73}$$

$$\left.\frac{dj_2}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dj_2}{dt}\right|_{t=0-} = 0 \tag{5-74}$$

En remplaçant $j_2 = 1 + A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ dans ces deux conditions, on obtient:

$$1 + A_1 + A_2 = 0 \tag{5-75}$$

$$s_1A_1 + s_2A_2 = 0 \quad (5\text{-}76)$$

Les solutions de ces équations sont:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & s_2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{s_2}{s_1 - s_2} = 0.17 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-s_1}{s_1 - s_2} = -1.17$$

Finalement, la solution pour tout t est:

$$j_2 = [1 + 0.17e^{-829.436t} - 1.17e^{-120.564t}]u(t) \quad (5\text{-}77)$$

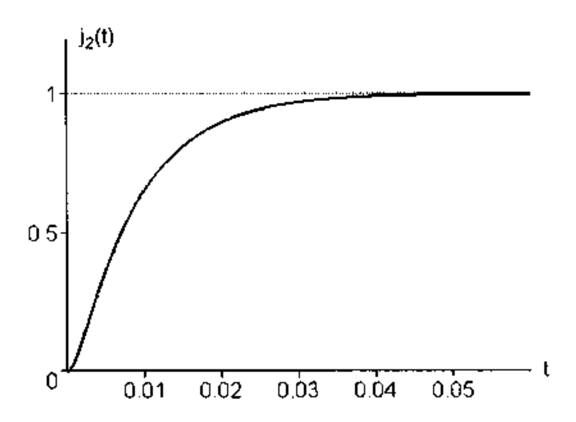


Figure 5-29 Réponse du circuit RLL de la figure 5-28 à un échelon de tension 100u(t). Courant j_2 dans la résistance R_2.

5.5.3 Réponse d'un circuit RLC à un échelon

Considérons le circuit RLC montré dans la figure 5-30.

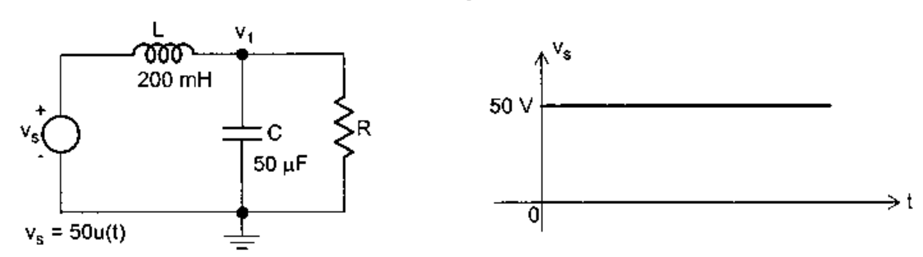


Figure 5-30 Circuit RLC excité par une source échelon.

La résistance R est laissée comme un paramètre du problème et on étudiera le comportement du circuit en fonction de la valeur de R.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant t = 0.

La source de tension v_s = 50u(t) représente une source de tension continue de 50 V ap-

pliquée à t = 0.

Nous définissons la *tension nodale* v_1 du circuit.

Équation différentielle

On établit les équations d'équilibre du circuit en utilisant la méthode des noeuds:

$$\left[Cs + \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls}\right]\left[v_1\right] = \left[\frac{v_s}{Ls}\right] \tag{5-78}$$

ou bien:

$$\left[LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right]v_1 = v_s \tag{5-79}$$

En remplaçant l'opérateur s par $\frac{d}{dt}$ et l'opérateur s^2 par $\frac{d^2}{dt^2}$, on obtient l'équation différentielle qui relie la tension v_1 à l'excitation v_s:

$$LC\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = v_s \tag{5-80}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$10^{-5}\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 50u(t) \tag{5-81}$$

Résolution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à t = 0. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: t < 0 et t > 0.

- Pour t < 0: le circuit est au repos. Donc $v_1 = 0$.
- Pour t > 0: v_1 est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 50 \tag{5-82}$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes:

$$v_1 = v_{1P} + v_{1H} \tag{5-83}$$

où v_{1P} est une *solution particulière* de l'équation (5-82) et v_{1H} est la solution de *l'équation homogène* $10^{-5}\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 0$

La solution particulière de l'équation (5-82) est: $v_{1P} = 50$.

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante:

$$v_{1H} = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

où A_1, A_2, s_1 et s_2 sont des constantes à déterminer.

Les constantes s_1 et s_2 sont les *fréquences naturelles* du circuit, qui sont les racines de

l'équation caractéristique: $10^{-5}s^2 + \frac{0.2}{R}s + 1 = 0$, avec $\Delta = \left(\frac{0.2}{R}\right)^2 - 4 \times 10^{-5}$

La nature de s_1 et s_2 dépend du signe de Δ, qui dépend de la valeur de R:

R < 31.623 Ω	Δ > 0	s_1 et s_2 sont réelles, distinctes et négatives.
R = 31.623 Ω	Δ = 0	s_1 et s_2 sont égales et négatives.
R > 31.623 Ω	Δ < 0	s_1 et s_2 sont complexes conjuguées, distinctes, avec une partie réelle négative.

Donc, la réponse homogène dépend de la valeur de la résistance R. Afin d'illustrer l'influence de R, nous choisissons trois valeurs de R: 10 Ω, 31.623 Ω, et 90 Ω.
Les valeurs de s_1 et s_2 pour ces trois cas sont données dans le tableau suivant:

R	Fréquences naturelles	
10 Ω	s_1 = -1948.7	s_2 = -51.3
31.623 Ω	s_1 = -316.23	s_2 = -316.23
90 Ω	s_1 = -111.11 + j296.06	s_2 = -111.11 - j296.06

Alors, la solution pour v_1 pour l'intervalle t > 0 est: $v_1 = 50 + A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$

Note: Le cas où $s_1 = s_2$ sera traité plus loin.

Conditions à t = 0

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide des *conditions initiales* (valeurs à t = 0+) de v_1 et $\frac{dv_1}{dt}$.

Nous avons: $v_1(0-) = 0$ parce que le circuit est initialement au repos.

En examinant l'équation (5-81), on constate que le membre droit [50u(t)] est discontinu à t = 0. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à t = 0. Cette discontinuité doit se trouver uniquement dans le terme $\frac{d^2v_1}{dt^2}$.

Donc à l'instant t = 0, v_1 et sa dérivée $\frac{dv_1}{dt}$ sont continues, c'est à dire:

$$v_1(0+) = v_1(0-) = 0 \tag{5-84}$$

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=0-} = 0 \tag{5-85}$$

En remplaçant $v_1 = 50 + A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ dans ces deux conditions, on obtient:

$$50 + A_1 + A_2 = 0 \tag{5-86}$$

$$s_1A_1 + s_2A_2 = 0 \tag{5-87}$$

On a donc: $A_1 = \dfrac{-50s_2}{s_2 - s_1}$ et $A_2 = \dfrac{50s_1}{s_2 - s_1}$

R	Constantes A_1 et A_2
10 Ω	$A_1 = 1.352$, $A_2 = -51.352$
90 Ω	$A_1 = -25 + j9.382 = 26.703\underline{/2.783}$ $A_2 = -25 - j9.382 = 26.703\underline{/-2.783}$

Finalement, la solution pour tout t est:

- pour R = 10 Ω $\quad v_1 = [50 + 1.352e^{-1948.7t} - 51.352e^{-51.3t}]u(t)$

- pour R = 90 Ω $\quad v_1 = [50 + 53.406e^{-111.11t}\cos(296.06t + 2.783)]u(t)$

Cas où $s_1 = s_2$

Pour ce cas, on peut démontrer que la solution homogène est de la forme:

$$v_{1H} = (B_1 + B_2 t)e^{s_1 t} \quad (5\text{-}88)$$

La solution pour v_1 pour l'intervalle $t > 0$ est:

$$v_1 = 50 + (B_1 + B_2 t)e^{s_1 t} \quad (5\text{-}89)$$

Les constantes B_1 et B_2 sont déterminées par les conditions initiales:

$v_1(0+) = v_1(0-) = 0 = 50 + B_1$

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=0-} = 0 = B_2 + s_1 B_1$$

On déduit: $B_1 = -50$ et $B_2 = -15812$

L'expression de v_1 pour tout t est:

- pour R = 31.623 Ω $\quad v_1 = [50 - (50 + 15812t)e^{-316.23t}]u(t)$

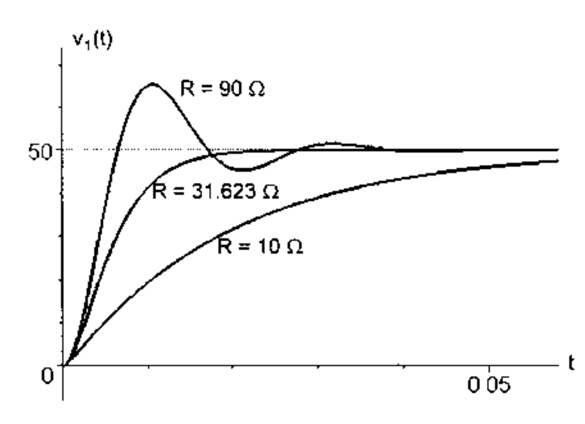


Figure 5-31 Réponse du circuit RLC excité par une source échelon en fonction de la valeur de la résistance R.

5.5.4 Réponse d'un circuit RLC à une excitation sinusoïdale

Considérons le circuit RLC montré dans la figure 5-32.

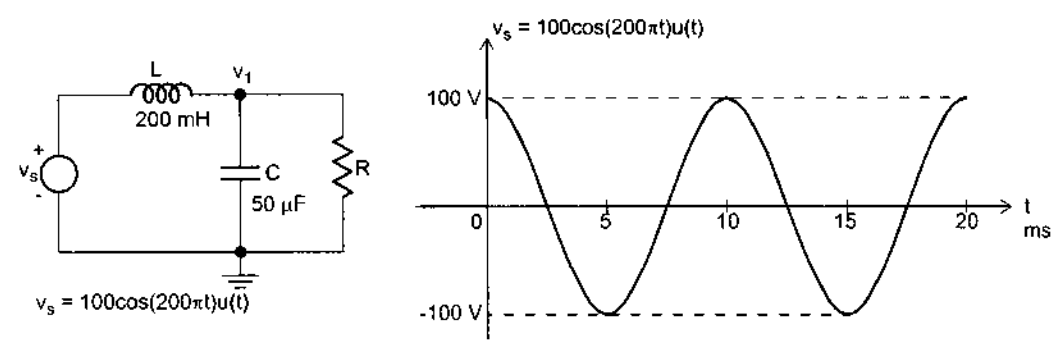


Figure 5-32 Circuit RLC excité par une source sinusoïdale.

La résistance R est laissée comme un paramètre du problème et on étudiera le comportement du circuit en fonction de la valeur de R.

Le circuit est *initialement au repos*: les tensions et les courants dans le circuit sont nuls avant l'instant t = 0.

La source de tension $v_s = 100\cos(200\pi t)u(t)$ représente une source de tension sinusoïdale d'amplitude 100 V et de fréquence 100 Hz, appliquée à t = 0.

Nous définissons la *tension nodale* v_1 du circuit.

Équation différentielle

Nous avons déjà établi l'équation d'équilibre du circuit:

$$LC\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = v_s \tag{5-90}$$

En remplaçant les valeurs numériques dans l'équation (5-90), on obtient:

$$10^{-5}\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 100\cos(200\pi t)u(t) = 100\mathrm{Re}\{e^{j200\pi t}u(t)\} \tag{5-91}$$

Résolution de l'équation différentielle

En premier lieu, nous résolvons l'équation suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_x}{dt} + v_x = e^{j\omega_0 t}u(t) \tag{5-92}$$

avec $\omega_0 = 200\pi$.

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à t = 0. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: t < 0 et t > 0.

- Pour t < 0: $v_x = 0$.
- Pour t > 0: v_x est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_x}{dt} + v_x = e^{j\omega_0 t} \tag{5-93}$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes:

$$v_x = v_{xP} + v_{xH} \tag{5-94}$$

où v_{xP} est une *solution particulière* de l'équation (5-93) et v_{xH} est la solution de *l'équation homogène* $10^{-5}\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{0.2}{R}\frac{dv_x}{dt} + v_x = 0$

La solution particulière de l'équation (5-93) est: $v_{xP} = Be^{j\omega_0 t}$

En remplaçant $v_{xP} = Be^{j\omega_0 t}$ dans l'équation (5-93), on obtient:

$$\left\{10^{-5}(j\omega_0)^2 + \frac{0.2}{R}(j\omega_0) + 1\right\}Be^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t}$$

On déduit: $$B = \frac{1}{(1 - 10^{-5}\omega_0^2) + j\frac{0.2\omega_0}{R}}$$

Pour R =10 Ω $\quad B = 0.0775\underline{/-1.801}$

Pour R =31.623 Ω $\quad B = 0.2021\underline{/-2.209}$

Pour R =90 Ω $\quad B = 0.3066\underline{/-2.699}$

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante:

$$v_{xH} = A_1e^{s_1 t} + A_2e^{s_2 t} \tag{5-95}$$

où A_1, A_2, s_1 et s_2 sont des constantes à déterminer.

Les constantes s_1 et s_2 sont les *fréquences naturelles* du circuit, qui sont les racines de l'équation caractéristique:

R	Fréquences naturelles	
10 Ω	$s_1 = -1948.7$	$s_2 = -51.3$
31.623 Ω	$s_1 = -316.23$	$s_2 = -316.23$
90 Ω	$s_1 = -111.11 + j296.06$	$s_2 = -111.11 - j296.06$

Alors, la solution pour v_x pour l'intervalle $t > 0$ est:

$$v_x = Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{s_1 t} + A_2e^{s_2 t} \tag{5-96}$$

<u>Note</u>: Le cas où $s_1 = s_2$ sera traité plus loin.

Conditions à t = 0

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide de la *condition initiale* de v_x (c'est à dire la valeur de v_x à l'instant t = 0+).

Nous avons: $\quad v_x(0-) = 0$

En examinant l'équation (5-92), on constate que le membre droit $[e^{j\omega_0 t}u(t)]$ est discontinu à t = 0. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à t = 0. Cette dis-

continuité doit se trouver uniquement dans le terme $\frac{d^2v_x}{dt^2}$.

Donc à l'instant t = 0, v_x et sa dérivée dv_x/dt sont continues, c'est à dire:

$$v_x(0+) = v_x(0-) = 0$$

$$\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0-} = 0$$

En remplaçant $v_x = Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{s_1 t} + A_2e^{s_2 t}$ dans ces deux conditions, on obtient:

$$B + A_1 + A_2 = 0 \qquad (5\text{-}97)$$

$$j\omega_0 B + s_1A_1 + s_2A_2 = 0 \qquad (5\text{-}98)$$

On a donc:

$$A_1 = \frac{(j\omega_0 - s_2)B}{s_2 - s_1} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{(j\omega_0 - s_1)B}{s_1 - s_2} \qquad (5\text{-}99)$$

R	Constantes A_1 et A_2	
10 Ω	$A_1 = 0.0257\underline{/-0.312}$	$A_2 = 0.0836\underline{/1.652}$
90 Ω	$A_1 = 0.4821\underline{/0.323}$	$A_2 = 0.1814\underline{/-3.022}$

La solution pour v_x pour tout t est:

R = 10 Ω $\qquad v_x = [Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{-1948.7t} + A_2e^{-51.3t}]u(t) \qquad (5\text{-}100)$

avec: $B = 0.0775\underline{/-1.801}$, $A_1 = 0.0257\underline{/-0.312}$, et $A_2 = 0.0836\underline{/1.652}$

R = 90 Ω $\qquad v_x = [Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{(-\alpha+j\beta)t} + A_2e^{(-\alpha-j\beta)t}]u(t) \qquad (5\text{-}101)$

avec: $B = 0.3066\underline{/-2.699}$, $A_1 = 0.4821\underline{/0.323}$, $A_2 = 0.1814\underline{/-3.022}$, $\alpha = 111.11$ et $\beta = 296.06$.

Finalement, la tension v_1 est donnée par:

$$v_1 = 100\text{Re}\{v_x\} \qquad (5\text{-}102)$$

- pour R = 10 Ω

$$v_1 = 100\text{Re}\left\{[Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{-1948.7t} + A_2e^{-51.3t}]u(t)\right\} \qquad (5\text{-}103)$$

avec: $B = 0.0775\underline{/-1.801}$, $A_1 = 0.0257\underline{/-0.312}$ et $A_2 = 0.0836\underline{/1.652}$.

Alors:

$$v_1 = [7.75\cos(200\pi t - 1.801) + 2.446e^{-1948.7t} - 0.678e^{-51.3t}]u(t) \qquad (5\text{-}104)$$

- pour R = 90 Ω $\qquad v_x = [Be^{j\omega_0 t} + A_1e^{(-\alpha+j\beta)t} + A_2e^{(-\alpha-j\beta)t}]u(t) \qquad (5\text{-}105)$

avec: $B=0.3066\underline{/-2.699}$, $A_1=0.4821\underline{/0.323}$, $A_2=0.1814\underline{/-3.022}$, $\alpha=111.11$ et $\beta=296.06$.

Alors:

$$v_1 = [30.66\cos(\omega_0 t - 2.699) + 48.21e^{-\alpha t}\cos(\beta t + 0.323) + 18.14e^{-\alpha t}\cos(\beta t + 3.022)]u(t) \quad (5\text{-}106)$$

ou bien:

$$v_1 = [30.66\cos(200\pi t - 2.699) + 32.75e^{-\alpha t}\cos(\beta t + 0.5625)]u(t) \quad (5\text{-}107)$$

Cas où $s_1 = s_2$

Pour ce cas, on peut démontrer que la solution homogène pour v_x est de la forme:

$$v_{xH} = (D_1 + D_2 t)e^{s_1 t} \quad (5\text{-}108)$$

La solution pour v_x pour l'intervalle $t > 0$ est:

$$v_x = Be^{j\omega_0 t} + (D_1 + D_2 t)e^{s_1 t} \quad (5\text{-}109)$$

Les constantes D_1 et D_2 sont déterminées par les conditions initiales:

$v_x(0+) = v_x(0-) = 0 = B + D_1$

$$\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0-} = 0 = j\omega_0 B + D_2 + s_1 D_1$$

Dans ces équations, $B = 0.2021\underline{/-2.209}$, $s_1 = -316.23$ et $\omega_0 = 200\pi$.

On déduit: $D_1 = 0.2021\underline{/0.933}$ et $D_2 = 142.16\underline{/2.037}$

L'expression de v_x pour tout t est:

pour R = 31.623 Ω

$$v_x = [Be^{j\omega_0 t} + (D_1 + D_2 t)e^{-316.23t}]u(t) \quad (5\text{-}110)$$

$$v_x = [0.2021e^{j(\omega_0 t - 2.209)} + (0.2021e^{j0.933} + 142.16e^{j2.037}t)e^{-316.23t}]u(t) \quad (5\text{-}111)$$

L'expression de v_1 pour tout t est:

$$v_1 = [20.21\cos(200\pi t - 2.209) + (12.04 - 6391.3t)e^{-316.23t}]u(t) \quad (5\text{-}112)$$

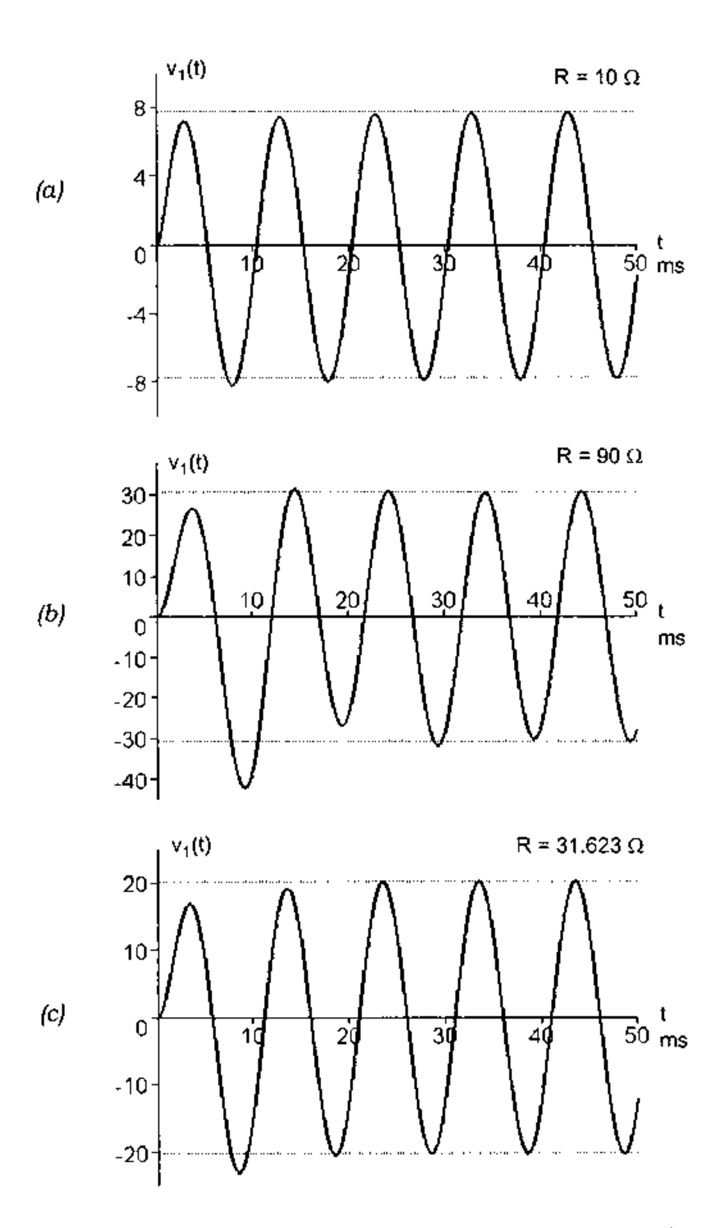


Figure 5-33 Réponse du circuit RLC de la figure 5-32 à une tension sinusoïdale d'amplitude 100 V et de fréquence 100 Hz appliquée à t = 0. (a) R = 10 Ω. (b) R = 90 Ω. (c) R = 31.623 Ω.

5.5.5 Discussion sur la réponse d'un circuit du deuxième ordre

On constate que la réponse d'un circuit du deuxième ordre à une excitation appliquée brusquement à $t = 0$ est constituée de deux parties distinctes: la réponse particulière et la réponse homogène.

• La réponse particulière est de même nature que l'excitation et est appelée aussi la *réponse forcée.*

Si l'excitation est une constante, la réponse particulière sera une constante. Si l'excitation est sinusoïdale, la réponse particulière sera aussi sinusoïdale de même fréquence.

• La réponse homogène est déterminée uniquement par la nature du circuit et est appelée aussi la *réponse naturelle*. Pour un circuit du deuxième ordre, la réponse naturelle est caractérisée par deux fréquences naturelles s_1 et s_2 (qui sont appelées aussi les pôles du circuit).

- Pour les circuits RCC et RLL:

Les fréquences naturelles *s_1 et s_2 sont réelles et négatives*. La réponse naturelle est la somme de deux exponentielles décroissantes: $y_H = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}$

La durée du régime transitoire peut être considérée égale à 5 fois *la constante de temps la plus grande.*

- Pour les circuits RLC:

Trois cas sont possibles:

a) s_1 et s_2 sont réelles et négatives: similaire au cas des circuit RCC et RLL

b) s_1 et s_2 sont réelles, négatives et identiques:

. La réponse naturelle est de la forme suivante: $y_H = (B_1 + B_2 t)e^{-a_1 t}$

. La durée du régime transitoire est $5/a_1$.

c) s_1 et s_2 sont complexes conjuguées avec une partie réelle négative: $s_1 = -\alpha + j\beta$ et $s_2 = -\alpha - j\beta$

. La réponse naturelle est de la forme suivante: $y_H = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$

. C'est une fonction sinusoïdale dont l'enveloppe décroît exponentiellement ($e^{-\alpha t}$). La durée du régime transitoire est $5/\alpha$.

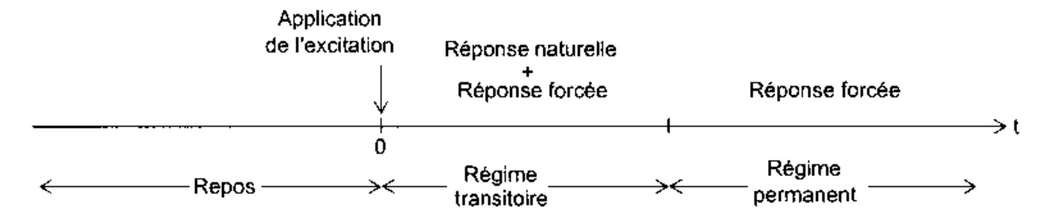


Figure 5-34 Régime transitoire et régime permanent dans un circuit du deuxième ordre.

Fréquence naturelle non amortie et coefficient d'amortissement

L'*équation caractéristique* d'un circuit du deuxième ordre est une équation quadratique:

$$as^2 + bs + c = 0 \qquad (5\text{-}113)$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad (5\text{-}114)$$

ou encore:

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1 = 0 \qquad (5\text{-}115)$$

Dans ces expressions:

- ω_n est définie comme la *fréquence naturelle non amortie*
- ζ est défini comme le *coefficient d'amortissement*

Les fréquences naturelles du circuit sont les racines de l'équation caractéristique:

$$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (5\text{-}116)$$

La valeur de ζ détermine la nature de s_1 et s_2 (par conséquent la nature de la réponse naturelle):

- $\underline{\zeta > 1}$: s_1 et s_2 sont réelles et négatives (la réponse naturelle est sur-amortie)

$$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- $\underline{\zeta = 1}$: s_1 et s_2 sont réelles, négatives et identiques (amortissement critique)

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

- $\underline{\zeta < 1}$: s_1 et s_2 sont complexes conjuguées avec une partie réelle négative (la réponse naturelle est sous-amortie)

$$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

- $\underline{\zeta = 0}$: s_1 et s_2 sont imaginaires conjuguées (la réponse naturelle est oscillatoire)

$$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} = \pm j\omega_n$$

La figure 5-35 montre la relation entre les fréquences naturelles et la réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire) d'un circuit du deuxième ordre.

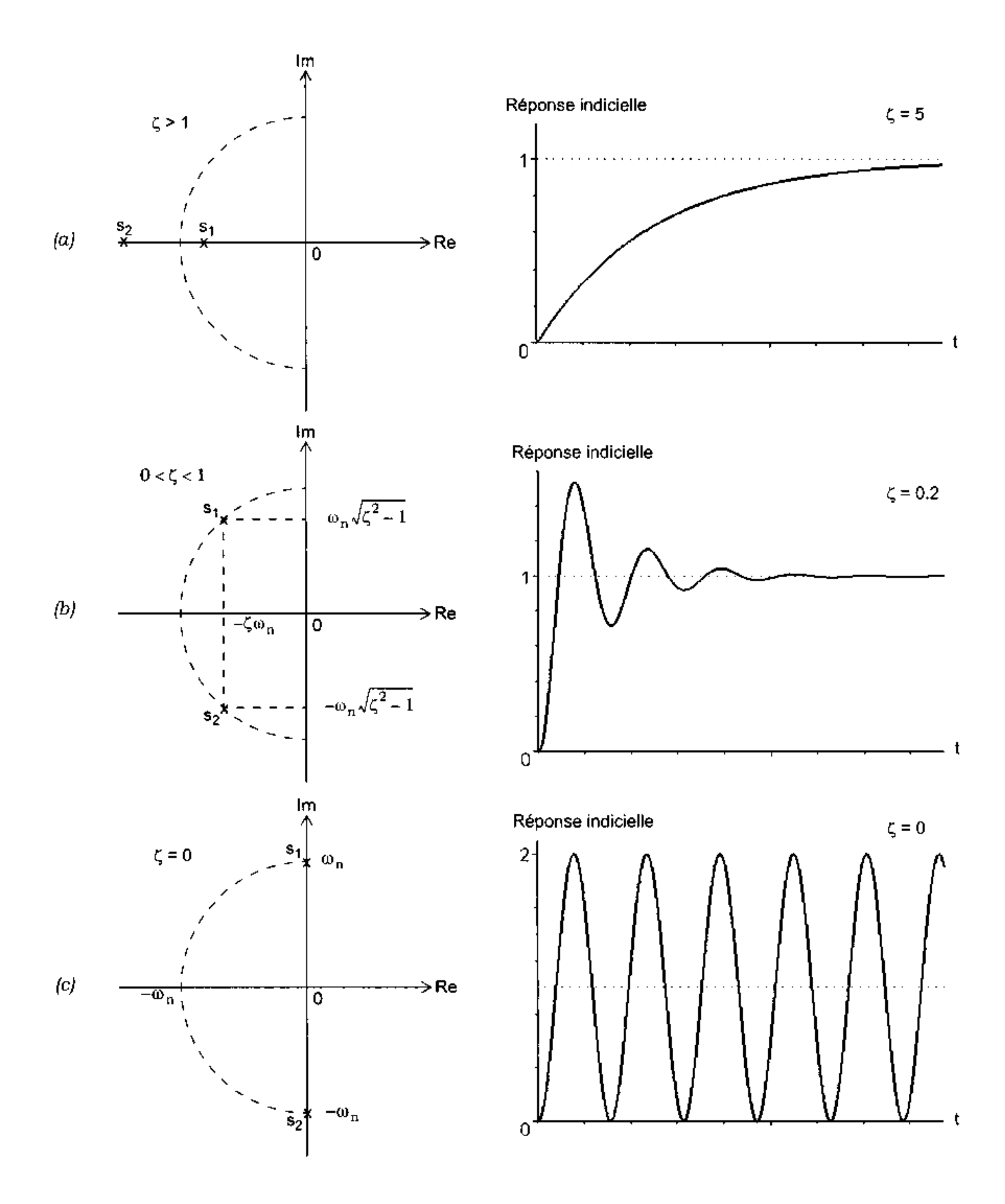


Figure 5-35 Fréquences naturelles et réponse indicielle d'un circuit du deuxième ordre. (a) $\zeta > 1$. (b) $0 < \zeta < 1$. (c) $\zeta = 0$.

5.6 Régime continu permanent

Avec une excitation continue (source CC), lorsque le régime transitoire est terminé, le circuit entre en un régime permanent où toutes les tensions et tous les courants sont constants. Ce régime est appelé *régime continu permanent (RCP).*

En régime continu permanent, les *dérivées dv/dt et di/dt sont nulles* parce que les tensions et les courants sont constants. Par conséquent, on peut remplacer les inductances et les condensateurs par leurs équivalents, tel qu'indiqué dans le tableau 5-3.

Élément	Équivalent en régime continu permanent
Condensateur: $i = C\frac{dv}{dt}$	Circuit ouvert: $i = 0$
Inductance: $v = L\frac{di}{dt}$	Court-circuit: $v = 0$

Tableau 5-3 Équivalent des éléments L et C en régime continu permanent.

On obtient ainsi un circuit résistif que l'on peut analyser en utilisant les méthodes habituelles.

Exemple 5-6 Analyse d'un circuit en régime continu

Considérons le circuit montré dans la figure 5-36.

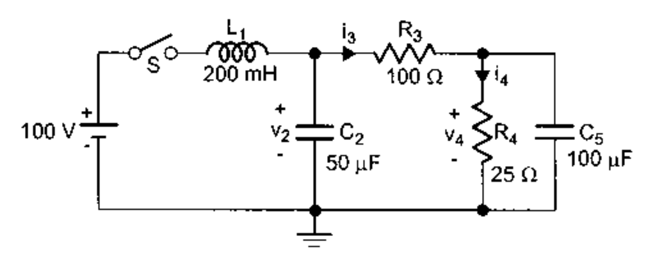


Figure 5-36 Circuit excité par une source continue appliquée à t = 0.

L'interrupteur S est fermé à t = 0 et demeure fermé pour le reste du temps. Le régime transitoire se termine après un certain temps. On désire calculer les courants et les tensions dans le circuit en régime permanent.

Pour calculer les tensions et les courants en RCP, on remplace l'inductance L_1 et les condensateurs C_1 et C_2 par leurs équivalents RCP comme montré dans la figure 5-37.

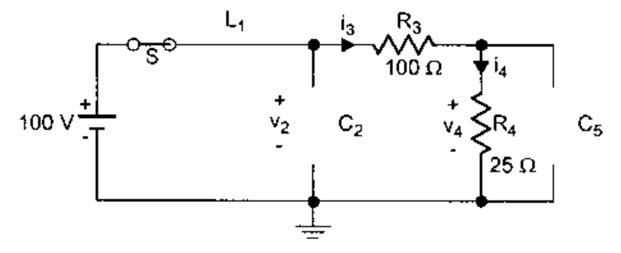


Figure 5-37 Circuit équivalent en régime continu permanent.

Nous avons:

$v_2(\infty) = 100$ V $\qquad v_4(\infty) = 20$ V

$i_1(\infty) = i_3(\infty) = i_4(\infty) = 100V/125\Omega = 0.8$ A

5.7 Analyse des circuits initialement excités

Les éléments L et C sont des éléments qui emmagasinent de l'énergie. Par conséquent, leur comportement dépend du passé. Pour analyser un circuit déjà excité (c'est à dire avec des inductances ayant des courants et/ou des condensateurs ayant des tensions) au moment de l'application de l'excitation, on doit tenir compte de *l'état du circuit à l'instant* $t = 0^-$ dû aux excitations antérieures.

Un condensateur accumule de l'énergie sous forme d'un champ électrique (qui dépend de la tension aux bornes du condensateur). La quantité d'énergie accumulée dépend de la capacité C et de la tension v au carré:

$$W_C = \frac{1}{2}Cv^2$$

Considérons la relation v-i d'un condensateur:

$$v_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i_C dt}_{v_C(0^-)} + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C dt \qquad (5\text{-}117)$$

Dans cette relation, le terme $v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i_C dt$ représente la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t = 0^-$. Elle représente tout le passé du condensateur parce que c'est l'intégrale du courant i_C de $-\infty$ à 0^-.

Ainsi, pour $t > 0$, un condensateur avec une tension initiale $v_C(0^-)$ peut être représenté par un circuit équivalent comprenant un condensateur de même valeur, initialement au repos, en série avec une source de tension égale à $v_C(0^-)u(t)$.

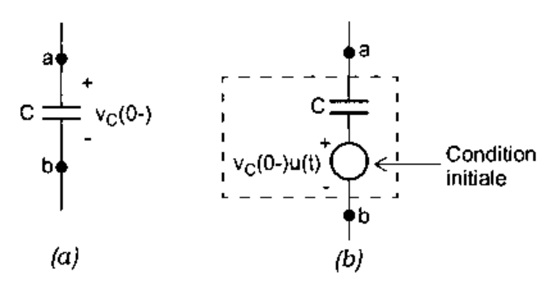


Figure 5-38 Modèle d'un condensateur initialement chargé.
(a) Condensateur initialement chargé. (b) Circuit équivalent pour t > 0.

Une inductance accumule de l'énergie sous forme d'un champ magnétique (qui dépend du courant dans l'inductance). La quantité d'énergie accumulée dépend de l'inductance L et du carré du courant i:

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2$$

La relation v-i d'une inductance est:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L dt = \underbrace{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-} v_L dt}_{i_L(0^-)} + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v_L dt \qquad (5\text{-}118)$$

Dans cette relation, le terme $i_L(0^-) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-} v_L dt$ représente le courant dans l'inductance à l'instant $t = 0^-$. Elle représente tout le passé de l'inductance parce que c'est l'intégrale de la tension v_L de $-\infty$ à 0^-.

Ainsi, pour $t > 0$, une inductance avec un courant initial $i_L(0^-)$ peut être représentée par un circuit équivalent comprenant une inductance de même valeur, initialement au repos, en parallèle avec une source de courant égale à $i_L(0^-)u(t)$.

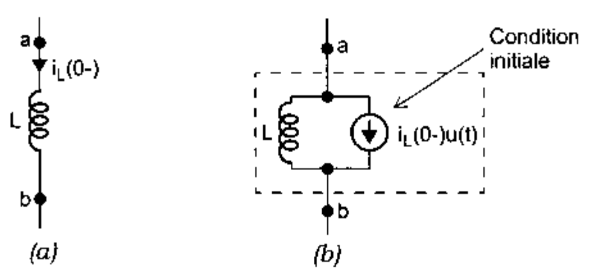


Figure 5-39 Modèle d'une inductance initialement chargée.
(a) Inductance initialement chargée. (b) Circuit équivalent pour t > 0.

Méthode d'analyse

Utilisant les circuits équivalents présentés précédemment, on peut analyser un circuit initialement excité en suivant les étapes ci-dessous:

Étape 1 Déterminer les tensions aux bornes des condensateurs et les courants dans les inductances à l'instant $t = 0^-$. Ces tensions et courants constituent l'état initial du circuit.

Étape 2 Remplacer chaque condensateur et chaque inductance par un circuit équivalent formé d'un élément initialement au repos et une source échelon représentant son état initial.

Étape 3 Analyser le circuit équivalent obtenu dans l'étape 2 par les méthodes utilisées pour les circuits initialement au repos.

Exemple 5-7 Analyse d'un circuit initialement excité

Considérons le circuit montré dans la figure 5-40.

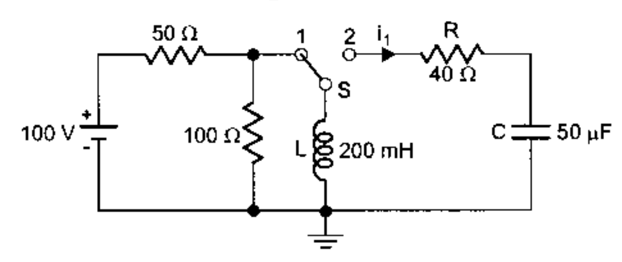


Figure 5-40 Circuit contenant un commutateur.

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À l'instant t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette position pour le reste du temps. On désire déterminer le courant i_1 pour t > 0.

À l'instant $t = 0^-$, le commutateur est à la position 1 et le circuit est en régime continu permanent. L'inductance L se comporte alors comme un court-circuit. Le courant circulant dans L à $t = 0^-$ est égal à:

$$i_L(0^-) = \frac{100V}{50\Omega} = 2A$$

Pour t > 0, on remplace «l'inductance 200 mH avec condition initiale» par «une inductance 200 mH sans condition initiale» en parallèle avec «une source de courant de 2u(t)». On obtient ainsi le circuit équivalent valide pour t > 0 comme montré dans la figure 5-41.

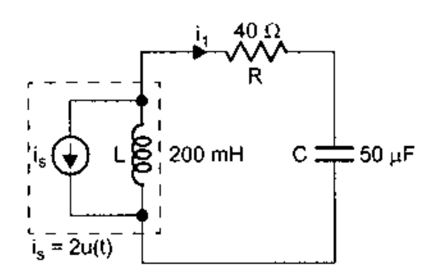


Figure 5-41 Circuit équivalent pour t > 0.

On écrit l'équation d'équilibre du circuit:

$$\left[Ls + R + \frac{1}{Cs}\right]i_1 = [-Ls]i_s \tag{5-119}$$

ou bien:

$$[LCs^2 + RCs + 1]i_1 = [-LCs^2]i_s \tag{5-120}$$

En remplaçant s par $\frac{d}{dt}$ et s^2 par $\frac{d^2}{dt^2}$, on obtient l'équation différentielle qui relie i_1 à i_s:

$$LC\frac{d^2i_1}{dt^2}+RC\frac{di_1}{dt}+i_1 = -LC\frac{d^2i_s}{dt^2} \quad (5\text{-}121)$$

Avec les valeurs numériques, on a l'équation différentielle suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2i_1}{dt^2}+2\times10^{-3}\frac{di_1}{dt}+i_1 = -10^{-5}\frac{d^2i_s}{dt^2} = -10^{-5}\frac{d^2}{dt^2}[2u(t)] \quad (5\text{-}122)$$

En premier lieu, nous résolvons l'équation différentielle suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2y}{dt^2}+2\times10^{-3}\frac{dy}{dt}+y = u(t) \quad (5\text{-}123)$$

Cette équation différentielle linéaire a comme deuxième membre une fonction qui est discontinue à $t = 0$. Par conséquent, nous allons considérer deux intervalles distincts: $t < 0$ et $t > 0$.

- Pour $t < 0$: $y = 0$.
- Pour $t > 0$: y est la solution de l'équation différentielle suivante:

$$10^{-5}\frac{d^2y}{dt^2}+2\times10^{-3}\frac{dy}{dt}+y = 1 \quad (5\text{-}124)$$

La solution de cette équation est la somme de deux termes: $y = y_P+y_H$, où y_P est une *solution particulière* de l'équation (5-124) et y_H est la solution de *l'équation homogène*

$$10^{-5}\frac{d^2y}{dt^2}+2\times10^{-3}\frac{dy}{dt}+y = 0$$

La solution particulière de l'équation (5-124) est: $y_P = 1$

La solution de l'équation homogène est de la forme suivante: $y_H = A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$, où A_1, A_2, s_1 et s_2 sont des constantes à déterminer.

Les *fréquences naturelles* s_1 et s_2 sont les racines de l'équation caractéristique:

$$10^{-5}s^2+2\times10^{-3}s+1 = 0$$

On a: $s_1 = -100 + j300$ et $s_2 = -100 - j300$

Alors, la solution pour y pour l'intervalle $t > 0$ est: $y = 1+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide des *conditions initiales* de y et dy/dt.

Nous avons: $y(0-) = 0$

En examinant l'équation (5-123), on constate que le membre droit [u(t)] est discontinu à $t = 0$. Par conséquent, le membre gauche est aussi discontinu à $t = 0$. Cette discontinuité doit se trouver uniquement dans le terme $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Donc à l'instant $t = 0$, y et sa dérivée dy/dt sont continues, c'est à dire:

$$y(0+) = y(0-) = 0 \quad (5\text{-}125)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0+} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0-} = 0 \quad (5\text{-}126)$$

En remplaçant $y = 1 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ dans ces deux conditions, on obtient:

$$1 + A_1 + A_2 = 0 \tag{5-127}$$

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0 \tag{5-128}$$

Les solutions de cet ensemble d'équations sont:

$$A_1 = \frac{-s_2}{s_2 - s_1} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{s_1}{s_2 - s_1} \tag{5-129}$$

Donc: $A_1 = 0.527\underline{/2.820}$ et $A_2 = 0.527\underline{/-2.820}$

La solution pour y pour tout t est:

$$y = [1 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}]u(t) \tag{5-130}$$

La solution de l'équation (5-122) est donnée par la relation suivante:

$$i_1 = -2 \times 10^{-5} \frac{d^2}{dt^2}[y] = -2 \times 10^{-5} \frac{d^2}{dt^2}\left\{[1 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}]u(t)\right\}$$

$$i_1 = -2 \times 10^{-5}[s_1^2 A_1 e^{s_1 t} + s_2^2 A_2 e^{s_2 t}]u(t)$$

$$i_1 = -[1.054 e^{j0.322} e^{(-100 + j300)t} + 1.054 e^{-j0.322} e^{(-100 - j300)t}]u(t)$$

$$i_1 = [-2.108 e^{-100t} \cos(300t + 0.322)]u(t)$$

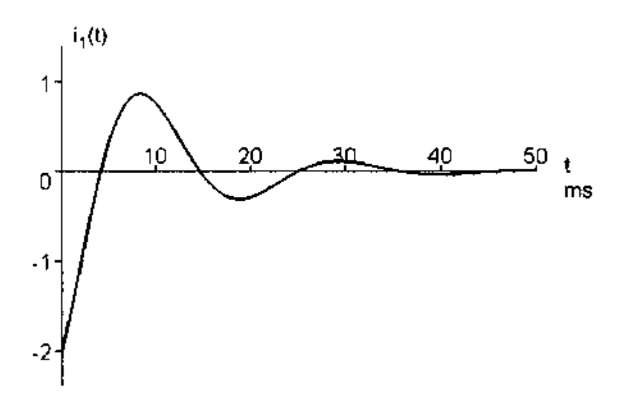


Figure 5-42 Courant i_1 pour $t > 0$.

Exercices

5.1 Le circuit de la figure E5-1 est initialement au repos.

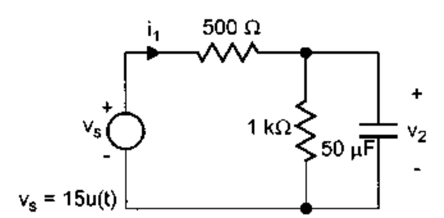


Figure E5-1

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.
Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.
b) Déduire le courant i_1 et la tension v_2 dans les cas suivants: $v_s = 5\delta(t)$ et $v_s = 10r(t)$.
Tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour chaque cas.

5.2 Le circuit de la figure E5-2 est initialement au repos.

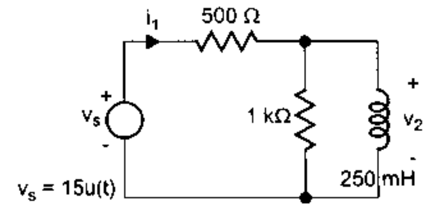


Figure E5-2

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.
Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.
b) Déduire le courant i_1 et la tension v_2 dans les cas suivants: $v_s = 5\delta(t)$ et $v_s = 10r(t)$.
Tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour chaque cas.

5.3 Le circuit de la figure E5-3 est initialement au repos.

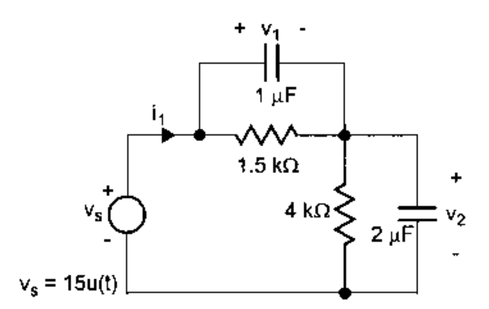


Figure E5-3

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, la tension v_1 et la tension v_2.

Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1, la tension v_1 et la tension v_2 en régime permanent.

b) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, la tension v_1 et la tension v_2 dans le cas où v_s est une impulsion carrée d'amplitude 15 V et de durée 30 ms.

5.4 Le circuit de la figure E5-4 est initialement au repos.

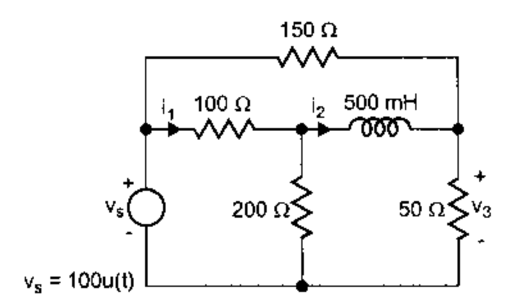


Figure E5-4

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3 en régime permanent.

5.5 Le circuit de la figure E5-5 est initialement au repos.

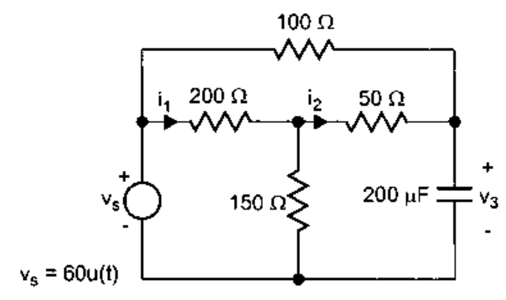


Figure E5-5

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3 en régime permanent.

5.6 Le circuit de la figure E5-6 est initialement au repos.

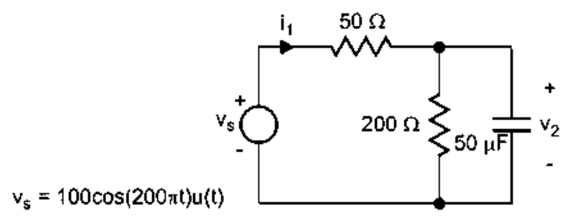


Figure E5-6

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.7 Le circuit de la figure E5-7 est initialement au repos.

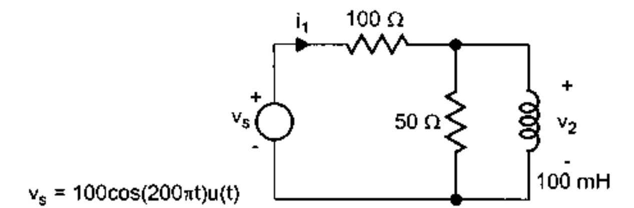


Figure E5-7

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.8 Le circuit de la figure E5-8 est initialement au repos.

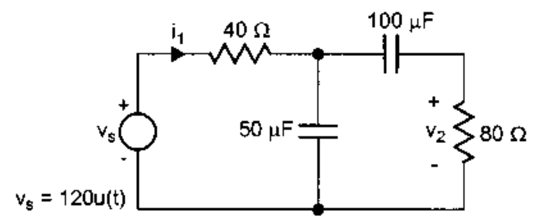


Figure E5-8

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.9 Le circuit de la figure E5-9 est initialement au repos.

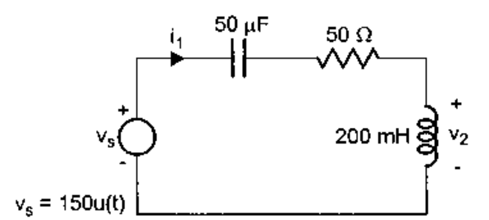


Figure E5-9

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.10 Le circuit de la figure E5-10 est initialement au repos.

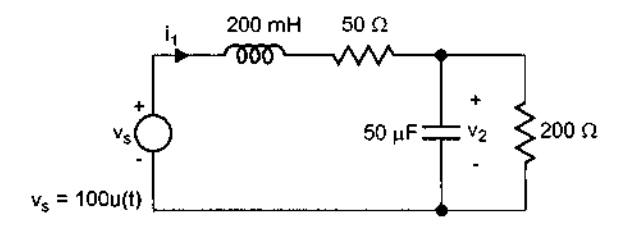


Figure E5-10

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(500πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.11 Le circuit de la figure E5-11 est initialement au repos.

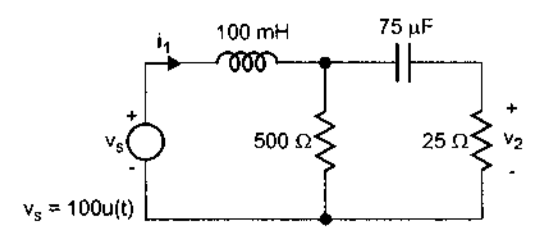


Figure E5-11

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(400πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.12 Soit le circuit montré dans la figure E5-12.

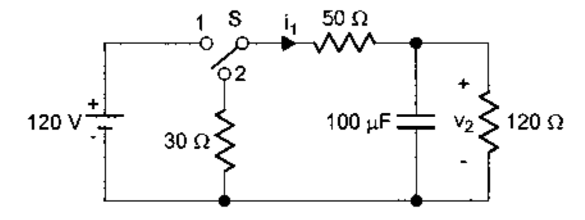


Figure E5-12

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette dernière position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire?

5.13 Soit le circuit montré dans la figure E5-13.

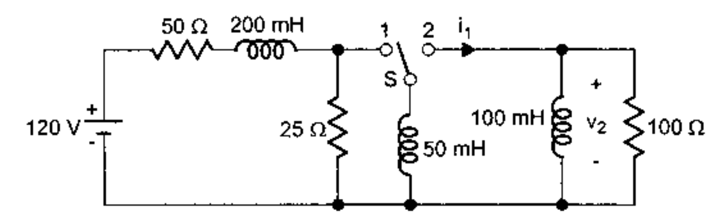


Figure E5-13

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette dernière position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire?

5.14 Soit le circuit montré dans la figure E5-14.

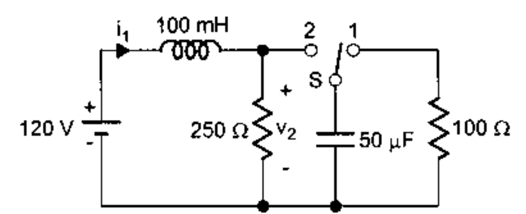


Figure E5-14

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette dernière position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

5.15 Soit le circuit montré dans la figure E5-15.

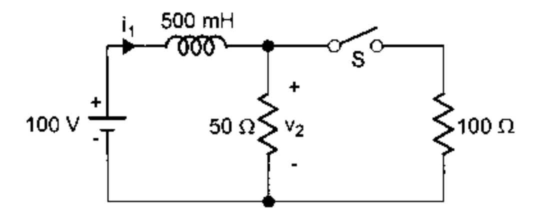


Figure E5-15

L'interrupteur S est ouvert depuis très longtemps. À t = 0, S est fermé et demeure à cette position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courants i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courants i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

Chapitre 6

ANALYSE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES PAR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans ce chapitre, la transformation de Laplace est définie et ses principales propriétés sont étudiées. L'application de la transformation de Laplace dans l'analyse des circuits électriques est considérée et une méthode générale d'analyse est présentée.

6.1 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace transforme une fonction du temps f(t) en une fonction de la *fréquence complexe* s:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \qquad (6\text{-}1)$$

La fonction F(s) est la *transformée* de Laplace de f(t). On écrit:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad (6\text{-}2)$$

Remarque: La fréquence complexe s est habituellement exprimée sous forme $s = \sigma + j\omega$.

La transformation de Laplace est définie par la relation suivante:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (6\text{-}3)$$

Une fonction f(t) est transformable si:
- elle est continue par sections,
- il existe un nombre réel et positif σ_1 de telle sorte que $\int_{0^-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_1 t}dt < \infty$.

Remarque: Cette dernière condition signifie que l'intégrale (6-3) doit exister.

Exemple 6-1 Transformée d'un échelon

La transformée de Laplace d'un échelon unitaire est:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad (6\text{-}4)$$

Exemple 6-2 Transformée d'une exponentielle

La transformée de Laplace d'une exponentielle commençant à t = 0 est:

$$\mathcal{L}[e^{at}u(t)] = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a-s}e^{(a-\sigma-j\omega)t}\Big|_0^\infty \quad (6\text{-}5)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}u(t)] = \frac{1}{s-a} \qquad \text{pour } \sigma > a \quad (6\text{-}6)$$

La transformation de Laplace étant unique, il est possible d'établir une *table de transformation* qui contient des paires de transformées de base. En utilisant cette table de transformation de base et les propriétés de la transformation de Laplace, on peut déterminer la transformée d'une fonction f(t) quelconque sans effectuer l'intégrale (6-3).

Nous allons étudier les *propriétés de base* de la transformation de Laplace.

6.1.1 Linéarité

La transformation de Laplace est une opération linéaire:

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (6\text{-}7)$$

Exemple 6-3 Transformée d'une fonction sinusoïdale

Nous avons: $\cos x = \frac{1}{2}[e^{jx} + e^{-jx}]$ et $\sin x = \frac{1}{2j}[e^{jx} - e^{-jx}]$

Nous écrivons:

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] = \frac{1}{s-j\omega} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)] = \frac{1}{s+j\omega}$$

Alors:

$$\mathcal{L}[\cos\omega t u(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (6\text{-}8)$$

et

$$\mathcal{L}[\sin\omega t u(t)] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (6\text{-}9)$$

6.1.2 Transformation de dérivée

Nous écrivons:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_{0^-}^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + \int_{0^-}^\infty sf(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s)$$

Donc:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (6\text{-}10)$$

De façon générale:

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) \quad (6\text{-}11)$$

6.1.3 Transformation d'intégrale

Nous écrivons:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_0^t f(t)dt\right]e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-st}dt\right]f(t)dt \qquad (6\text{-}12)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_{0^-}^{\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]f(t)dt = \frac{F(s)}{s} \qquad (6\text{-}13)$$

Dans le cas d'une fonction de la forme $y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$, nous écrivons:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}_{y(0)\text{ = condition initiale}}$$

Alors: $$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt + y(0)\right] = \frac{1}{s}[F(s) + y(0)] \qquad (6\text{-}14)$$

avec $y(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$.

6.1.4 Changement d'échelle de temps

Si la transformée de f(t) est F(s), la transformée de f(at) est:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-\frac{s}{a}(at)}d(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (6\text{-}15)$$

6.1.5 Transformation de $t^n f(t)$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}[F(s)] \qquad (6\text{-}16)$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)] \qquad (6\text{-}17)$$

Exemple 6-4 **Transformée d'une rampe**

Nous avons: $r(t) = tu(t)$

Alors:

$$\mathcal{L}[r(t)] = -\frac{d}{ds}\{\mathcal{L}[u(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{s^2} \qquad (6\text{-}18)$$

6.1.6 Transformation de f(t)/t

Nous avons:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds \qquad (6\text{-}19)$$

Cette relation est valide seulement si f(t) est transformable et $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ existe.

Exemple 6-5 **Transformée de $\frac{\sin at}{t}$**

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \int_s^{\infty} \frac{a}{s^2+a^2}ds = \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right)\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (6\text{-}20)$$

6.1.7 Translation de l'axe du temps

Si la transformée de f(t) est F(s), la transformée de f(t-a) est:

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}\int_{0^-}^{\infty} f(t-a)e^{-s(t-a)}d(t-a) = e^{-as}F(s) \qquad (6\text{-}21)$$

Exemple 6-6 **Transformée d'une impulsion carrée**

La figure 6-1 illustre le calcul de la transformée d'une impulsion carrée d'amplitude 1 et de largeur a.

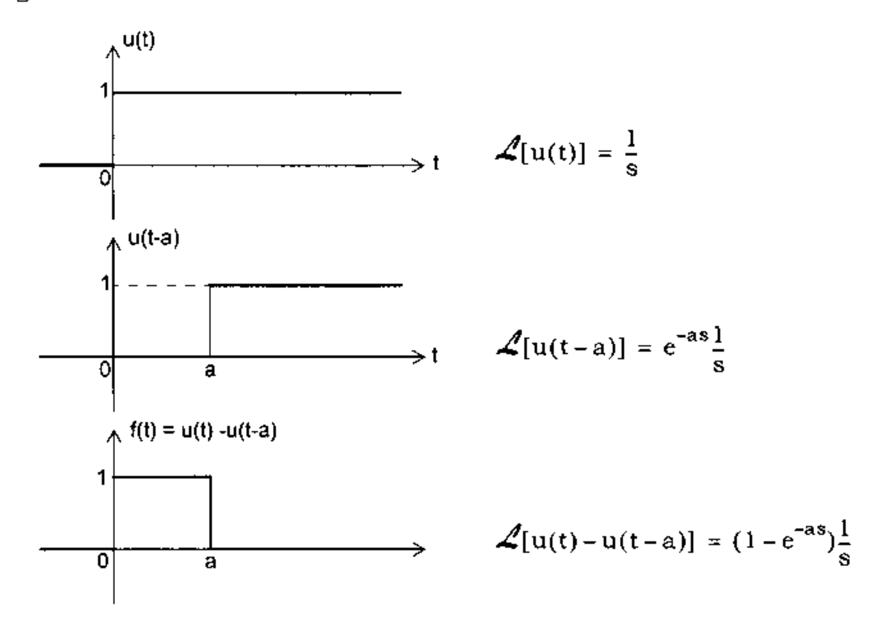


Figure 6-1 Calcul de la transformée d'une impulsion carrée.

L'impulsion unitaire δ(t) peut être considérée comme la limite d'une impulsion carrée d'amplitude 1/a et de largeur a lorsque a tend vers zéro:

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{a}[u(t)-u(t-a)]\right\} \qquad (6\text{-}22)$$

La transformée de δ(t) sera donc la limite de la transformée de l'impulsion carrée lorsque a tend vers zéro:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{a\to 0}\left\{\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}[u(t)-u(t-a)]\right]\right\} = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{as}(1-e^{-as})\right\} \qquad (6\text{-}23)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{a \to 0}\left\{\frac{se^{-as}}{s}\right\} = 1 \qquad (6\text{-}24)$$

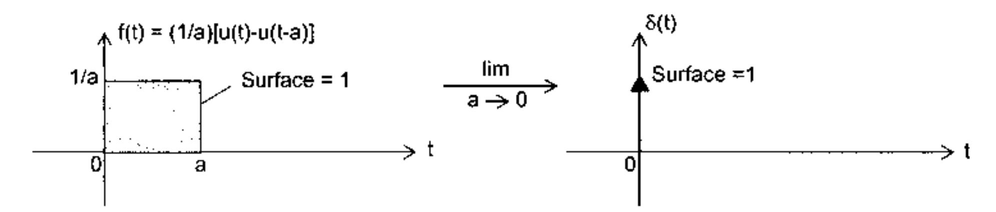


Figure 6-2 L'impulsion δ(t) est la limite de l'impulsion carrée.

6.1.8 Translation de l'axe de fréquence

Si F(s) est la transformée de f(t), la transformée de $e^{at}f(t)$ est:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a) \qquad (6\text{-}25)$$

Exemple 6-7 Transformée d'une fonction $e^{at}f(t)$

Nous avons: $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ et $\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2}$

Alors: $\mathcal{L}[e^{-5t}u(t)] = \frac{1}{s+5}$ et $\mathcal{L}[te^{-5t}u(t)] = \frac{1}{(s+5)^2}$

6.1.9 Transformation des fonctions périodiques

Considérons une fonction périodique f(t) de période T qui commence à t = 0. On définit:

$f_1(t) = f(t)$ pour $0 < t < T$ — la *première période* de f(t)

$f_2(t) = f_1(t-T)$ — la deuxième période de f(t)

$f_3(t) = f_1(t-2T)$ — la troisième période de f(t)

$f_4(t) = f_1(t-3T)$ — la quatrième période de f(t)

etc.

La fonction f(t) est égale à la somme des fonctions représentant chaque période:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + \ldots \qquad (6\text{-}26)$$

La transformée de Laplace de f(t) sera:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) + \ldots \qquad (6\text{-}27)$$

$$F(s) = F_1(s) + e^{-sT}F_1(s) + e^{-2sT}F_1(s) + e^{-3sT}F_1(s) + e^{-4sT}F_1(s) + \ldots \qquad (6\text{-}28)$$

$$F(s) = F_1(s)\{1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \ldots\} = F_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}} \qquad (6\text{-}29)$$

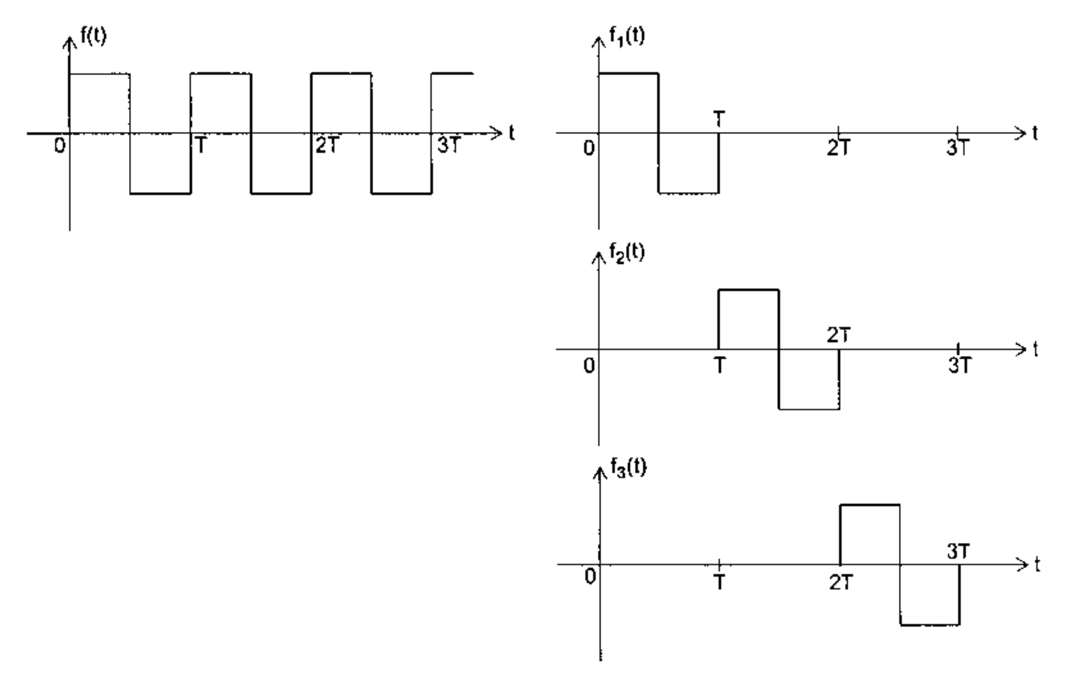


Figure 6-3 Décomposition d'une fonction périodique en une somme de ses périodes.

On peut constater que la transformée de Laplace d'une fonction périodique de période T est égale à la transformée de sa première période multipliée par un facteur de périodicité $\frac{1}{1-e^{-sT}}$.

Exemple 6-8 Transformée d'un train d'impulsions

Considérons le train d'impulsions montré dans la figure 6-4.

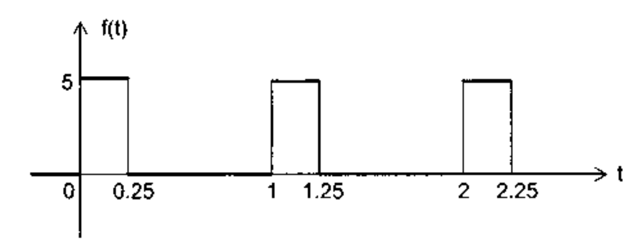


Figure 6-4 Un train d'impulsions carrées.

La première période de f(t) est:

$$f_1(t) = 5[u(t) - u(t-0.25)]$$

La transformée de la première période de f(t) est:

$$F_1(s) = \frac{5}{s}(1 - e^{-0.25s})$$

La période de f(t) est T = 1 s. La transformée de f(t) est donc:

$$F(s) = \frac{5}{s}(1 - e^{-0.25s})\left(\frac{1}{1 - e^{-s}}\right)$$

6.1.10 Théorème de la valeur initiale et la valeur finale

La valeur initiale et la valeur finale d'une fonction f(t) sont données par les relations suivantes:

Valeur initiale: $$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} \{sF(s)\} \qquad (6\text{-}30)$$

Valeur finale: $$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \{sF(s)\} \qquad (6\text{-}31)$$

La deuxième relation s'applique seulement au cas où les racines du dénominateur de sF(s) ont une partie réelle négative. Autrement, la limite n'existe pas.

Fonction	f(t)	F(s)
Impulsion unitaire	$\delta(t)$	1
Échelon unitaire	u(t)	$\frac{1}{s}$
Rampe unitaire	r(t)	$\frac{1}{s^2}$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
Sinus	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosinus	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Rampe amortie	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tableau 6-1 Liste de transformées de Laplace de base.

Opération	f(t)	F(s)
Multiplier par une constante	Kf(t)	KF(s)
Addition	f1(t) + f2(t) + f3(t) + ...	F1(s) + F2(s) + F3(s) + ...
Dérivée première	$\frac{df}{dt}$	sF(s) - f(0)
Dérivée seconde	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Dérivée d'ordre n	$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)$ $- s^{n-3}f''(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$
Intégrale	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Décalage temporel	f(t-a)	$e^{-as}F(s)$
Multiplier par une exponentielle	$e^{-at}f(t)$	F(s+a)
Changement d'échelle de temps	f(at) , a > 0	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Multiplier par t	tf(t)	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Multiplier par t^2	$t^2f(t)$	$\frac{d^2F(s)}{ds^2}$
Multiplier par t^n	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
Diviser par t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(x)dx$

Tableau 6-2 Propriétés de la transformation de Laplace.

6.2 Transformation inverse de Laplace

6.2.1 Définition

La transformation inverse de Laplace est définie par la relation suivante:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi}\int_{(\sigma_1 - j\infty)}^{(\sigma_1 + j\infty)} F(s)e^{st}ds \qquad (6\text{-}32)$$

Cette intégrale est une intégrale de contours dans le plan complexe (plan s).

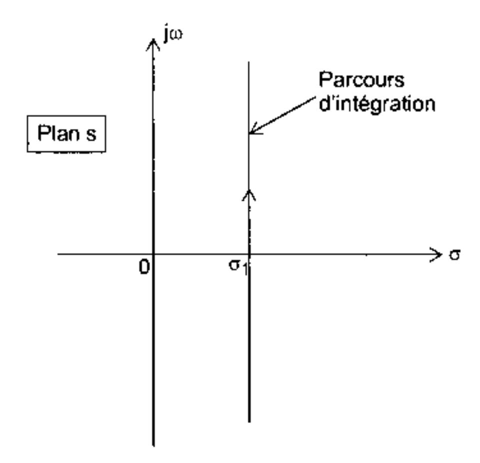


Figure 6-5 Intégrale de transformation inverse de Laplace.

La fonction du temps f(t) peut être déterminée à partir de sa transformée F(s) en effectuant l'intégrale (6-32).

En pratique, on utilise plutôt un tableau de transformation et les propriétés de la transformation de Laplace (au lieu de faire l'intégrale) pour déterminer la transformée inverse.

Lorsque F(s) est une *fonction rationnelle* (ce qui est souvent le cas avec les circuits électriques), on peut décomposer F(s) en *une somme de fractions partielles*. La transformation inverse de Laplace peut être déterminée ensuite terme par terme.

6.2.2 Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Une fonction rationnelle F(s) est le rapport de deux polynômes en s:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (6\text{-}33)$$

De façon générale, toute fonction rationnelle F(s) peut être exprimée comme:

$$F(s) = R(s) + \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (6\text{-}34)$$

avec l'ordre de P(s) inférieur à l'ordre de Q(s).

Par conséquent, nous allons considérer seulement le cas d'une fonction F(s) ayant $m < n$.

L'équation $D(s) = 0$ possède n racines qui sont appelées les *pôles* de F(s). Ces pôles

peuvent être simples et réels, complexes conjugués, ou multiples.

On écrit:

$$D(s) = a_n(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots(s-p_n) \tag{6-35}$$

où $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sont les racines de D(s).

Cas des pôles simples et réels

Lorsque les n pôles de F(s) sont *simples et réels*, on peut exprimer F(s) sous la forme suivante:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \ldots + \frac{K_n}{s-p_n} \tag{6-36}$$

où $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ sont des constantes réelles données par:

$$K_j = (s-p_j)F(s)\big|_{s=p_j} \tag{6-37}$$

Ces constantes K_j sont appelées les *résidus* de F(s).

Exemple 6-9 Décomposition d'une fonction F(s) en fractions partielles

Soit la fonction F(s) suivante: $F(s) = \dfrac{5s^2+5s+5}{2s^3+14s^2+28s+16}$

Les pôles de cette fonction sont: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$ et $p_3 = -4$.

Nous écrivons: $F(s) = \dfrac{5s^2+5s+5}{2(s+1)(s+2)(s+4)}$

La fonction F(s) peut être décomposée en une somme de fractions partielles:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

Les constantes K_1, K_2 et K_3 sont calculées:

$$K_1 = \left.\frac{5s^2+5s+5}{2(s+2)(s+4)}\right|_{s=-1} = \frac{5}{6}$$

$$K_2 = \left.\frac{5s^2+5s+5}{2(s+1)(s+4)}\right|_{s=-2} = \frac{-15}{4}$$

$$K_3 = \left.\frac{5s^2+5s+5}{2(s+1)(s+2)}\right|_{s=-4} = \frac{65}{12}$$

Cas des pôles complexes simples

Les pôles complexes apparaissent en paires conjuguées. Supposons que F(s) a une paire de pôles complexes simples:

$p_1 = -a + jb$ et $p_2 = -a - jb$

On peut exprimer F(s) sous la forme suivante:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_1(s)(s+a-jb)(s+a+jb)} \tag{6-38}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+a-jb)} + \frac{K_1^*}{(s+a+jb)} + \text{autres termes} \tag{6-39}$$

où K_1 est une *constante complexe* donnée par:

$$K_1 = (s+a-jb)F(s)\big|_{s=-a+jb} \tag{6-40}$$

Exemple 6-10 Décomposition d'une fonction F(s) avec des pôles simples

Soit la fonction F(s) suivante: $F(s) = \dfrac{64(s+5)}{3s^4+15s^3+33.75s^2+60s+38.25}$

Les pôles de F(s) sont: $p_1 = -0.5 + j2$, $p_2 = -0.5 - j2$, $p_3 = -1$ et $p_4 = -3$.

Nous écrivons:

$$F(s) = \frac{64(s+5)}{3(s+0.5-j2)(s+0.5+j2)(s+1)(s+3)} = \frac{64(s+5)}{3(s^2+s+4.25)(s+1)(s+3)}$$

On peut décomposer **F(s)** en une somme de fractions partielles:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+0.5-j2} + \frac{K_1^*}{s+0.5+j2} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{s+3}$$

Les constantes K_1, K_3 et K_4 sont calculées:

$$K_1 = \left.\frac{64(s+5)}{3(s+0.5+j2)(s+1)(s+3)}\right|_{s=-0.5+j2} = 3.979\underline{/3.130}$$

$$K_3 = \left.\frac{64(s+5)}{3(s^2+s+4.25)(s+3)}\right|_{s=-1} = 10.039$$

$$K_4 = \left.\frac{64(s+5)}{3(s^2+s+4.25)(s+1)}\right|_{s=-3} = -2.081$$

Cas des pôles multiples

Lorsque F(s) a un pôle p_i d'ordre r, on peut exprimer **F(s)** comme:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_1(s)(s-p_i)^r} \tag{6-41}$$

La décomposition en fractions partielles donnera:

$$F(s) = \frac{K_{i1}}{s-p_i} + \frac{K_{i2}}{(s-p_i)^2} + \ldots + \frac{K_{ij}}{(s-p_i)^j} + \ldots + \frac{K_{ir}}{(s-p_i)^r} + \text{ autres termes} \tag{6-42}$$

où K_{i1}, K_{i2}, ..., K_{ir} sont des constantes données par

$$K_{ij} = \frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}}\{(s-p_i)^r F(s)\}\Big|_{s=p_i} \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{6-43}$$

Pour un *pôle double* (r = 2), les expressions de K_{ij} sont:

$$K_{i1} = \frac{d}{ds}\{(s-p_i)^2 F(s)\}\Big|_{s=p_i} \tag{6-44}$$

$$K_{i2} = (s - p_i)^2 F(s)\Big|_{s = p_i} \tag{6-45}$$

Exemple 6-11 Décomposition d'une fonction F(s) avec un pôle double

Soit la fonction F(s) suivante: $F(s) = \dfrac{5s(s+3)}{4s^3 + 12s^2 + 9s + 2}$

Les pôles sont: $p_1 = -0.5$ (pôle double) et $p_2 = -2$.

Nous écrivons: $F(s) = \dfrac{5s(s+3)}{4(s+0.5)^2(s+2)}$

La décomposition en fractions partielles donne: $F(s) = \dfrac{K_{11}}{s+0.5} + \dfrac{K_{12}}{(s+0.5)^2} + \dfrac{K_2}{s+2}$

Les constantes K_{11}, K_{12} et K_2 sont calculées:

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{5s(s+3)}{4(s+2)}\right\}\Bigg|_{s=-0.5} = \frac{5(s^2+4s+6)}{4(s+2)^2}\Bigg|_{s=-0.5} = 2.361$$

$$K_{12} = \frac{5s(s+3)}{4(s+2)}\Bigg|_{s=-0.5} = -1.042$$

$$K_2 = \frac{5s(s+3)}{4(s+0.5)^2}\Bigg|_{s=-2} = -1.111$$

6.2.3 Transformation inverse des fractions partielles

On constate qu'une fonction rationnelle F(s) peut être décomposée en une somme de fractions partielles qui sont des formes suivantes:

$$\frac{A}{(s+a)^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{(s+a-jb)^n} + \frac{A^*}{(s+a+jb)^n}$$

Alors, la transformée inverse de F(s) sera égale à la somme des transformées inverses des fractions partielles déterminées individuellement.

Transformée inverse de $\dfrac{A}{(s+a)^n}$

Nous avons:

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{6-46}$$

$$\mathcal{L}\{t^{n-1} u(t)\} = \frac{(n-1)!}{s^n} \tag{6-47}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} t^{n-1} u(t)\right\} = \frac{(n-1)!}{(s+a)^n} \tag{6-48}$$

On déduit:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s+a)^n}\right\} = \frac{A}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}u(t) \qquad (6\text{-}49)$$

Transformée inverse de $\frac{A}{(s+a-jb)^n} + \frac{A^*}{(s+a+jb)^n}$

Nous écrivons: $A = |A|e^{j\phi}$ et $A^* = |A|e^{-j\phi}$

En utilisant la relation (6-48), nous obtenons:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{|A|e^{j\phi}}{(s+a-jb)^n}\right\} = \frac{|A|e^{j\phi}}{(n-1)!}e^{-(a-jb)t}t^{n-1}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{|A|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^n}\right\} = \frac{|A|e^{-j\phi}}{(n-1)!}e^{-(a+jb)t}t^{n-1}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{|A|e^{j\phi}}{(s+a-jb)^n} + \frac{|A|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^n}\right\} = \frac{|A|}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}[e^{j(bt+\phi)} + e^{-j(bt+\phi)}]u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{|A|e^{j\phi}}{(s+a-jb)^n} + \frac{|A|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^n}\right\} = \frac{2|A|}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}\cos(bt+\phi)u(t) \qquad (6\text{-}50)$$

F(s)	f(t)
$\frac{A}{s+a}$	$Ae^{-at}u(t)$
$\frac{A}{(s+a)^2}$	$Ate^{-at}u(t)$
$\frac{A}{(s+a)^n}$	$\frac{A}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}u(t)$
$\frac{\|A\|e^{j\phi}}{(s+a-jb)} + \frac{\|A\|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)}$	$2\|A\|e^{-at}\cos(bt+\phi)u(t)$
$\frac{\|A\|e^{j\phi}}{(s+a-jb)^2} + \frac{\|A\|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^2}$	$2\|A\|te^{-at}\cos(bt+\phi)u(t)$
$\frac{\|A\|e^{j\phi}}{(s+a-jb)^n} + \frac{\|A\|e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^n}$	$\frac{2\|A\|}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}\cos(bt+\phi)u(t)$

Tableau 6-3 Quelques paires de transformées utiles.

Exemple 6-12 Transformation inverse d'une fonction F(s)

Dans l'exemple 6-9, nous avons décomposé la fonction $F(s) = \dfrac{5s^2+5s+5}{2(s+1)(s+2)(s+4)}$ en une somme de fractions partielles:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} \qquad \text{avec } K_1 = 5/6,\ K_2 = -15/4,\ \text{et } K_3 = 65/12.$$

La transformation inverse de F(s) donnera:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left[\frac{5}{6}e^{-t} - \frac{15}{4}e^{-2t} + \frac{65}{12}e^{-4t}\right]u(t)$$

Exemple 6-13 Transformation inverse d'une fonction F(s)

Dans l'exemple 6-10, la fonction $F(s) = \dfrac{64(s+5)}{3s^4+15s^3+33.75s^2+60s+38.25}$ a été décomposée en une somme de fractions partielles:

$$F(s) = \frac{K_1}{s+0.5-j2} + \frac{K_1^*}{s+0.5+j2} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{s+3}$$

avec $K_1 = 3.979\underline{/3.130}$, $K_3 = 10.039$ et $K_4 = -2.081$.

La transformation inverse de F(s) donnera:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = [7.958e^{-0.5t}\cos(2t+3.130) + 10.039e^{-t} - 2.081e^{-3t}]u(t)$$

Exemple 6-14 Transformation inverse d'une fonction F(s)

Dans l'exemple 6-11, nous avons décomposé la fonction $F(s) = \dfrac{5s(s+3)}{4(s+0.5)^2(s+2)}$ en une somme de fractions partielles:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s+0.5} + \frac{K_{12}}{(s+0.5)^2} + \frac{K_2}{s+2}$$

avec $K_{11} = 2.361$, $K_{12} = -1.042$ et $K_2 = -1.111$.

La transformation inverse de F(s) donnera:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = [2.361e^{-0.5t} - 1.042te^{-0.5t} - 1.111e^{-2t}]u(t)$$

6.3 Analyse des circuits par la transformation de Laplace

L'application de la transformation de Laplace dans l'analyse des circuits électriques est illustrée dans la figure 6-6.

La transformation de Laplace transforme une fonction du temps f(t) en une fonction F(s) dans le domaine de s (fréquence complexe).

Ainsi, on peut transformer un circuit électrique (composé d'éléments et de sources) en un *circuit transformé* dans le domaine de fréquence complexe. Ce circuit transformé est composé d'éléments transformés et de sources transformées qui sont obtenus par l'application de la transformation de Laplace.

On peut transformer également les lois et les théorèmes du domaine du temps en des lois et des théorèmes dans le domaine de fréquence complexe.

Le comportement du circuit est décrit par les *équations différentielles* dans le domaine du temps qui deviendront des *équations algébriques* dans le domaine de fréquence complexe.

La résolution de ces équations algébriques nous donnera la réponse dans le domaine de fréquence complexe. La transformation inverse de Laplace permettra d'obtenir la réponse en domaine du temps.

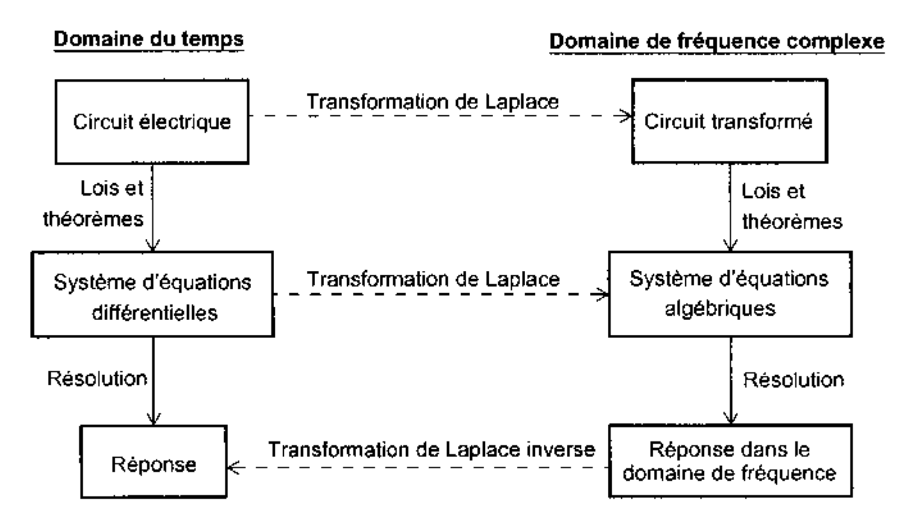


Figure 6-6 Analyse des circuits électriques utilisant la transformation de Laplace.

6.3.1 Transformation des éléments du domaine de temps en domaine de fréquence complexe

Transformation de sources

Les sources de tension et de courant sont des fonctions du temps. Leurs équivalents dans le domaine de fréquence sont leurs transformées de Laplace.

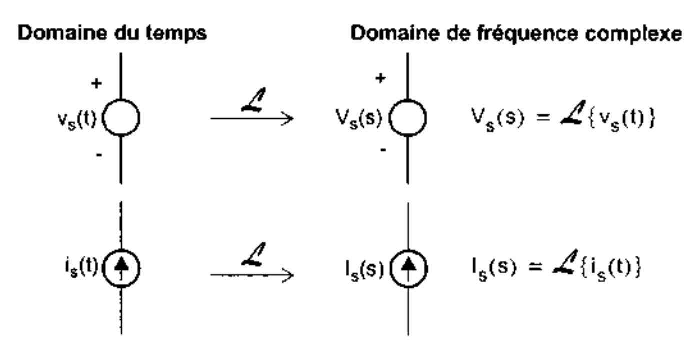


Figure 6-7 Transformation des sources.

Transformation de R

On peut transformer une résistance R en un élément dans le domaine de fréquence en transformant sa relation v-i comme illustré dans la figure 6-8.

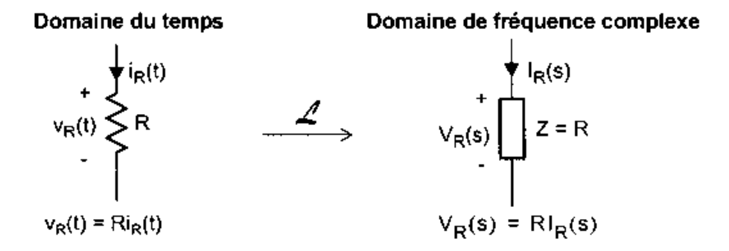


Figure 6-8 Transformation d'une résistance.

Transformation de L

On peut transformer une inductance L en un élément dans le domaine de fréquence en transformant sa relation v-i comme illustré dans la figure 6-9.

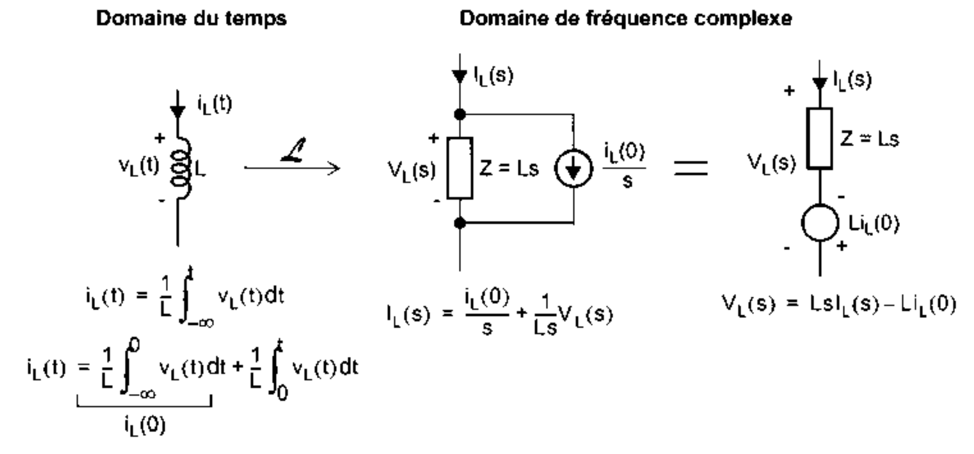


Figure 6-9 Transformation d'une inductance.

Transformation de C

On peut transformer un condensateur C en un élément dans le domaine de fréquence en transformant sa relation v-i comme illustré dans la figure 6-10.

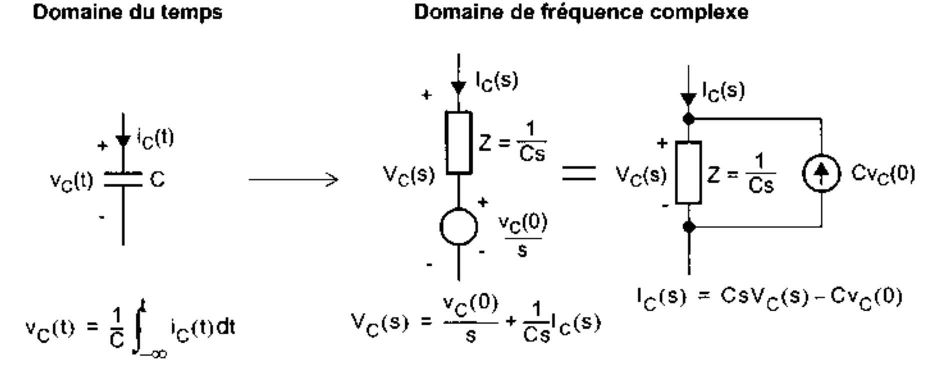


Figure 6-10 Transformation d'un condensateur.

6.3.2 Impédance et admittance complexes

En examinant les relations entre V(s) et I(s) pour les trois éléments R, L, C, on constate qu'elles sont de la même forme, lorsque les conditions initiales sont nulles:

$$V(s) = Z(s).I(s) \tag{6-51}$$

Dans cette expression, Z(s) est une fonction de s appelée *impédance complexe*.

On définit l'impédance complexe comme:

$$Z(s) = \left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{condition \cdot initiale = 0} \tag{6-52}$$

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance complexe:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \tag{6-53}$$

Élément	Impédance complexe Z(s)	Admittance complexe Y(s)
R	R	$\frac{1}{R}$
L	Ls	$\frac{1}{Ls}$
C	$\frac{1}{Cs}$	Cs

Tableau 6-4 Impédances des éléments RLC.

6.3.3 Lois et théorèmes de circuits dans le domaine de fréquence

Les lois et théorèmes de circuits du domaine du temps peuvent être transformés pour être applicables aux variables du domaine de fréquence.

Lois de Kirchhoff

- Loi des courants: $\sum_{k=1}^{N} I_k(s) = 0$ à un noeud
- Loi des tensions: $\sum_{k=1}^{N} V_k(s) = 0$ dans un parcours fermé

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre dans le domaine de fréquence sont établies de la même façon que dans le domaine du temps en utilisant les mêmes méthodes. La méthode des mailles et la méthode des noeuds s'appliquent intégralement.

Équivalent de deux impédances en série

L'impédance équivalente de deux impédances connectées en série est égale à la somme des deux impédances:

$$Z_{eq} = Z_1(s) + Z_2(s) \tag{6-54}$$

La tension aux bornes de chaque impédance est donnée par la loi du *diviseur de tension*:

$$V_1(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V(s) \tag{6-55}$$

$$V_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V(s) \tag{6-56}$$

où V(s) est la tension totale.

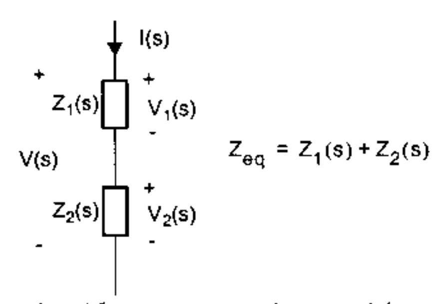


Figure 6-11 Deux impédances connectées en série.

Équivalent de deux impédances en parallèle

L'impédance équivalente de deux impédances connectées en parallèle est égale à:

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1(s) + Y_2(s)} = \frac{Z_1(s) \times Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (6\text{-}57)$$

Le courant dans chaque branche est donnée par la loi du *diviseur de courant*:

$$I_1(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} I(s) \quad (6\text{-}58)$$

$$I_2(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} I(s) \quad (6\text{-}59)$$

où I(s) est le courant total.

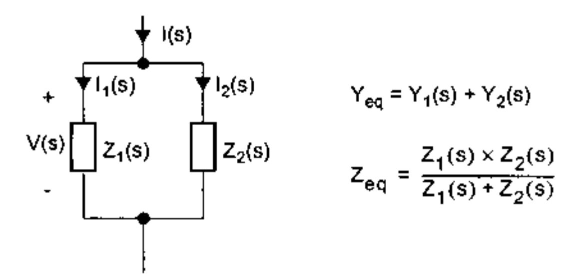


Figure 6-12 Deux impédances connectées en parallèle.

Équivalent Thévenin d'un dipôle

L'équivalent Thévenin d'un dipôle est composé d'une source de tension $V_T(s)$ en série avec une impédance $Z_T(s)$ tel qu'illustre la figure 6-13. Les éléments de l'équivalent Thévenin sont définis:

- Source de tension Thévenin $V_T(s) = V(s)|_{I(s)=0}$ = tension aux bornes a-b en circuit ouvert.
- Impédance Thévenin $Z_T(s)$ = impédance vue aux bornes a-b lorsque toutes les sources indépendantes dans le dipôle sont annulées.

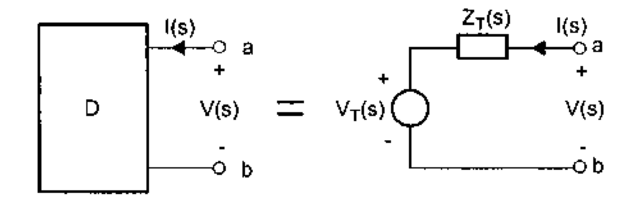


Figure 6-13 Équivalent Thévenin.

Équivalent Norton d'un dipôle

L'équivalent Norton d'un dipôle est composé d'une source de courant $I_N(s)$ en parallèle avec une impédance $Z_N(s)$ tel qu'illustre la figure 6-14. Les éléments de l'équivalent Nor-

ton sont définis:

- Source de courant Norton $I_N(s) = -I(s)|_{V(s)=0}$ = - courant en court-circuit du dipôle,
- Impédance Norton $Z_N(s)$ = impédance vue aux bornes a-b lorsque toutes les sources indépendantes dans le dipôle sont annulées.

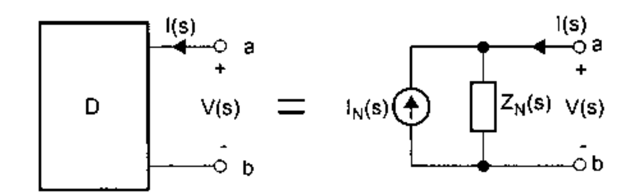


Figure 6-14 Équivalent Norton.

6.4 Méthode d'analyse et exemples d'application

L'analyse d'un circuit électrique à l'aide de la transformation de Laplace peut être effectuée en suivant les étapes ci-dessous.

<u>Étape 1</u>: *Transformer le circuit* en domaine de s en remplaçant les sources par leurs transformées et les éléments R, L, C par leurs impédances.

<u>Étape 2</u>: *Établir les équations d'équilibre* du circuit transformé utilisant les méthodes habituelles (équivalent série, équivalent parallèle, équivalent Thévenin, équivalent Norton, méthode des mailles, méthode des noeuds, etc.). Les équations obtenues sont des équations algébriques.

<u>Étape 3</u>: *Résoudre les équations d'équilibre* du circuit transformé. Déterminer la réponse désirée en domaine de s.

<u>Étape 4</u>: *Effectuer la transformation inverse* de la réponse en domaine de s pour obtenir la réponse en domaine du temps.

<u>Exemple 6-15</u> Analyse d'un circuit électrique par la transformation de Laplace
Considérons le circuit montré dans la figure 6-15.

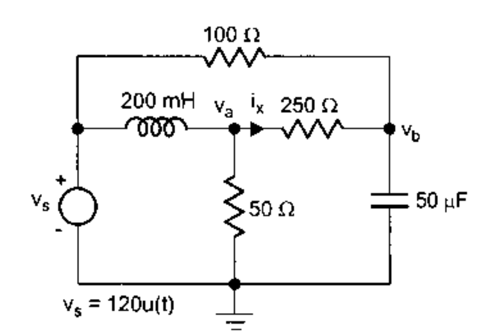


Figure 6-15 Circuit avec une source échelon.

On désire déterminer le courant i_x dans la résistance 250 Ω.

Pour trouver la solution utilisant la transformation de Laplace, nous suivons les quatre étapes mentionnées.

<u>Étape 1</u>: Transformer le circuit

Le circuit transformé dans le domaine de s est montré dans la figure 6-16.

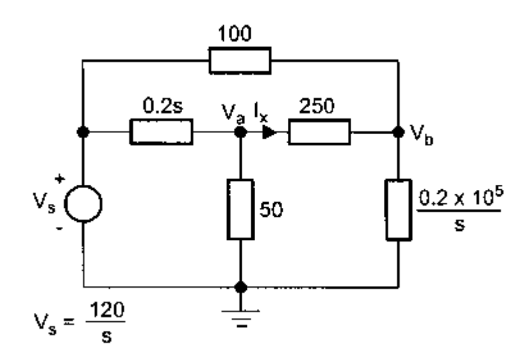


Figure 6-16 Circuit transformé.

Étape 2: Établir les équations d'équilibre

Les tensions nodales du circuit sont V_a et V_b. On établit les équations d'équilibre en utilisant la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{0.2s}+\frac{1}{50}+\frac{1}{250} & -\frac{1}{250} \\ -\frac{1}{250} & \frac{1}{250}+\frac{1}{100}+\frac{s}{0.2\times 10^5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_s}{0.2s} \\ \frac{V_s}{100} \end{bmatrix} \tag{6-60}$$

ou bien:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{s}+0.024 & -0.004 \\ -0.004 & 0.014+\frac{s}{0.2\times 10^5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5V_s}{s} \\ 0.01V_s \end{bmatrix} \tag{6-61}$$

Étape 3: Résoudre les équations d'équilibre

On détermine V_a et V_b:

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5V_s}{s} & -0.004 \\ 0.01V_s & 0.014+\frac{s}{0.2\times 10^5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{s}+0.024 & -0.004 \\ -0.004 & 0.014+\frac{s}{0.2\times 10^5} \end{vmatrix}} = \frac{0.029s+7}{1.2\times 10^{-4}s^2+0.057s+7}V_s$$

$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{s}+0.024 & \frac{5V_s}{s} \\ -0.004 & 0.01V_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{s}+0.024 & -0.004 \\ -0.004 & 0.014+\frac{s}{0.2\times 10^5} \end{vmatrix}} = \frac{0.024s+7}{1.2\times 10^{-4}s^2+0.057s+7}V_s$$

On calcule le courant I_x:

$$I_x = \frac{V_a - V_b}{250} = \frac{0.005s}{1.2\times10^{-4}s^2 + 0.057s + 7}\frac{120}{s}\frac{1}{250} = \frac{0.0024}{1.2\times10^{-4}s^2 + 0.057s + 7}$$

Étape 4: Transformation inverse

On décompose I_x en fractions partielles:

$$I_x = \frac{0.0024}{1.2\times10^{-4}(s + 237.5 - j43.9)(s + 237.5 + j43.9)}$$

$$I_x = \frac{K}{s + 237.5 - j43.9} + \frac{K^*}{s + 237.5 + j43.9} \quad \text{avec } K = -j0.2278 = 0.2278\underline{/-1.5708}.$$

Le courant $i_x(t)$ est obtenu par la transformation inverse de I_x:

$$i_x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_x\}$$

$$i_x(t) = [0.4556e^{-237.5t}\cos(43.9t - 1.5708)]u(t)$$

ou encore:

$$i_x(t) = [0.4556e^{-237.5t}\sin(43.9t)]u(t)$$

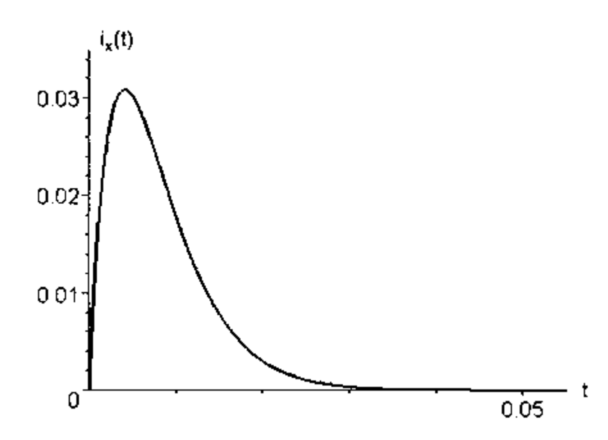


Figure 6-17 Le courant i_x en fonction du temps.

Exemple 6-16 Analyse d'un circuit électrique par la transformation de Laplace

Considérons le circuit montré dans la figure 6-18.

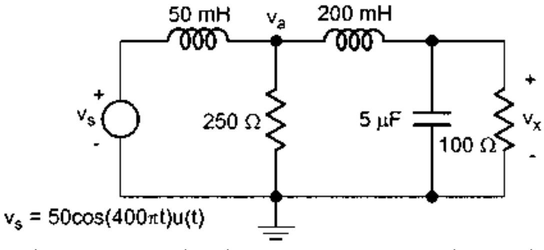


Figure 6-18 Circuit avec une source sinusoïdale.

On désire déterminer la tension v_x aux bornes de la résistance 100 Ω.

Le circuit transformé est montré dans la figure 6-19.

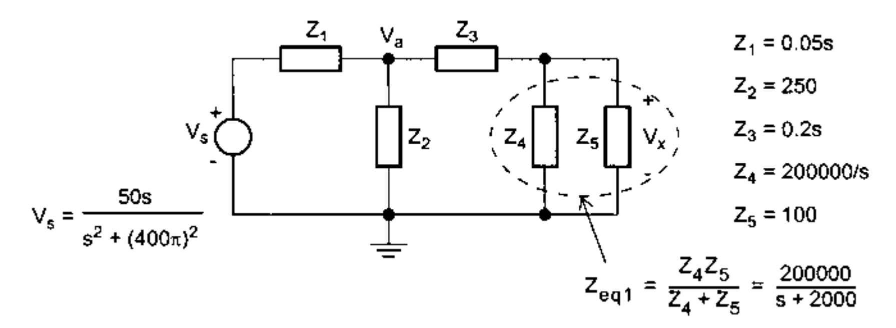


Figure 6-19 Circuit transformé.

On calcule V_x en appliquant deux fois la loi du diviseur de tension:

$$V_x = \frac{Z_{eq1}}{Z_{eq1} + Z_3} \times \frac{\dfrac{Z_2(Z_3 + Z_{eq1})}{Z_2 + Z_3 + Z_{eq1}}}{Z_1 + \dfrac{Z_2(Z_3 + Z_{eq1})}{Z_2 + Z_3 + Z_{eq1}}} \times V_s$$

$$V_x = \frac{Z_{eq1}Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_{eq1}) + Z_2(Z_3 + Z_{eq1})} \times V_s$$

$$V_x = \frac{5 \times 10^9}{s^3 + 8250s^2 + (1.35 \times 10^7)s + 5 \times 10^9} \times \frac{50s}{s^2 + (400\pi)^2}$$

On décompose V_x en fractions partielles:

$$V_x = \frac{5 \times 10^9 \times 50s}{(s + 6203.8)(s + 1513.7)(s + 532.4)(s - j400\pi)(s + j400\pi)}$$

$$V_x = \frac{K_1}{(s + 6203.8)} + \frac{K_2}{(s + 1513.7)} + \frac{K_3}{(s + 532.4)} + \frac{K_4}{(s - j400\pi)} + \frac{K_4^*}{(s + j400\pi)}$$

Les constantes K_1, K_2, K_3, et K_4 sont calculées:

$K_1 = -1.455$ $K_2 = 21.244$ $K_3 = -12.840$ $K_4 = 7.355\angle{-2.063}$

La tension $v_x(t)$ est la transformée inverse de V_x:

$$v_x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1.455}{(s + 6203.8)} + \frac{21.244}{(s + 1513.7)} + \frac{-12.840}{(s + 532.4)} + \frac{7.355\angle{-2.063}}{(s - j400\pi)} + \frac{7.355\angle 2.063}{(s + j400\pi)}\right\}$$

$$v_x(t) = [-1.455e^{-6203.8t} + 21.244e^{-1513.7t} - 12.84e^{-532.4t} + 14.71\cos(400\pi t - 2.063)]u(t)$$

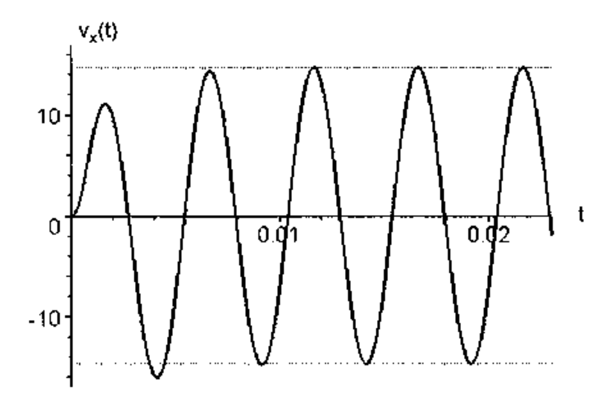


Figure 6-20 La tension v_x en fonction du temps.

Exemple 6-17 Analyse d'un circuit avec AMPLI OP par la transformation de Laplace

Soit le circuit montré dans la figure 6-21.

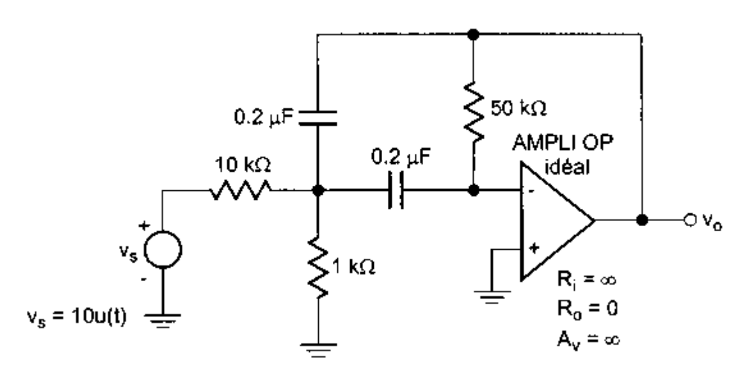


Figure 6-21 Circuit avec un AMPLI OP.

On désire déterminer la tension de sortie v_o.

Le circuit transformé dans le domaine de s est montré dans la figure 6-22.

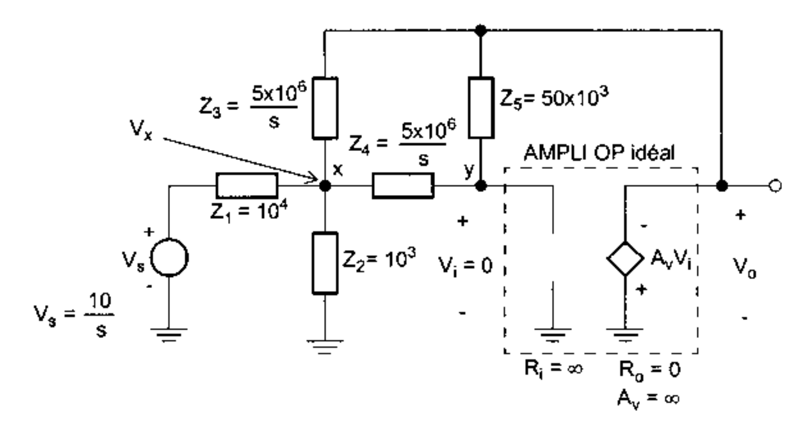


Figure 6-22 Circuit transformé.

La tension V_i est égale à 0 car le gain en tension de l'amplificateur opérationnel est infini. Le point y est au même potentiel que la masse.
On choisit V_x comme la tension nodale du circuit. On établit l'équations d'équilibre en utilisant la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right]V_x = \frac{V_s}{Z_1}+\frac{V_o}{Z_3} \tag{6-62}$$

En appliquant la loi des courants au noeud y, on obtient:

$$\frac{V_x}{Z_4} = \frac{-V_o}{Z_5}.$$

Ou encore:

$$V_x = -\frac{Z_4}{Z_5}\times V_o.$$

L'équation (6-62) devient:

$$\left[\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right]\left[-\frac{Z_4}{Z_5}\times V_o\right] = \frac{V_s}{Z_1}+\frac{V_o}{Z_3}$$

Ou bien:

$$-\left\{\frac{1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)\right\}V_o = \frac{V_s}{Z_1}$$

On déduit:

$$V_o = \frac{-\frac{1}{Z_1}}{\left\{\frac{1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)\right\}}V_s = \frac{-V_s}{\frac{Z_1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}+\frac{Z_1Z_4}{Z_2Z_5}+\frac{Z_1Z_4}{Z_3Z_5}+\frac{Z_1}{Z_5}}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$V_o = \frac{-5000}{s^2+200s+550000}$$

On décompose V_o en fractions partielles:

$$V_o = \frac{-5000}{(s+100-j734.85)(s+100+j734.85)}$$

$$V_o = \frac{K}{(s+100-j734.85)}+\frac{K^*}{(s+100+j734.85)}$$

avec $K = -3.402\angle{-1.571}$.

La tension $v_o(t)$ est la transformation inverse de V_o:

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_o\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3.402\angle{-1.571}}{(s+100-j734.85)}+\frac{-3.402\angle 1.571}{(s+100+j734.85)}\right\}$$

$$v_o(t) = [-6.804e^{-100t}\cos(734.85t-1.571)]u(t)$$

$$v_o(t) = [-6.804e^{-100t}\sin(734.85t)]u(t)$$

La figure 6-23 montre la tension de sortie $v_o(t)$ en fonction du temps.

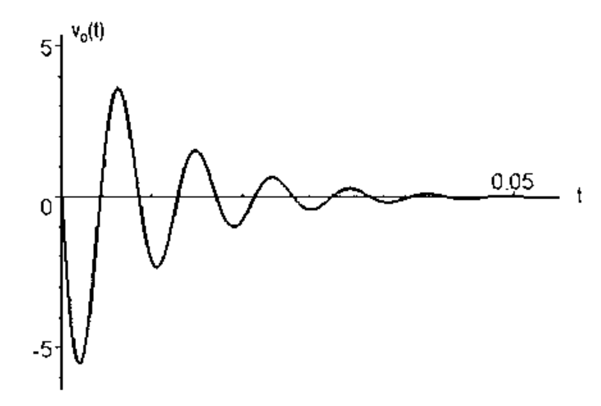


Figure 6-23 La tension v_o en fonction du temps.

6.5 Fonctions de réseau

6.5.1 Définition

Dans le chapitre 5, on a vu que la réponse y(t) d'un circuit électrique linéaire est reliée à l'excitation x(t) par une équation différentielle d'ordre n:

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = b_m\frac{d^mx}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{dx}{dt} + b_0x \qquad (6\text{-}63)$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sont des constantes qui dépendent des valeurs des éléments du circuit.

En transformant cette équation différentielle en domaine de Laplace (avec les conditions initiales nulles) on obtient une équation algébrique qui relie la réponse Y(s) à l'excitation X(s):

$$[a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0]Y(s) = [b_ms^m + \ldots + b_1s + b_0]X(s) \qquad (6\text{-}64)$$

La réponse Y(s) est la solution de l'équation (6-63):

$$Y(s) = \frac{[b_ms^m + \ldots + b_1s + b_0]}{[a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0]} \times X(s) \qquad (6\text{-}65)$$

On constate que la réponse Y(s) est égale au produit de l'excitation X(s) et la fonction $H(s) = \frac{[b_ms^m + \ldots + b_1s + b_0]}{[a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0]}$. Cette fonction est définie comme la *fonction de réseau* qui est le rapport entre les transformées de la réponse et de l'excitation du circuit:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad (6\text{-}66)$$

On peut ainsi considérer le circuit électrique comme un système avec l'entrée X(s) et la

sortie Y(s) tel qu'illustré dans la figure 6-24. Le système est complètement défini par la fonction de réseau H(s).

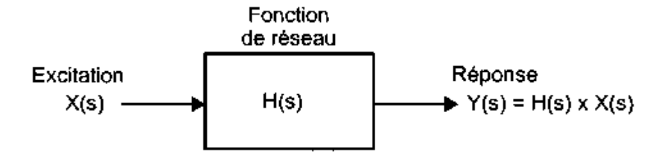


Figure 6-24 Définition de fonction de réseau.

Pour un circuit donné, on peut définir plusieurs fonctions de réseau suivant la réponse considérée. Les fonctions de réseau d'un circuit ne dépendent que de sa topologie et de la nature de ses éléments.

On distingue deux sortes de fonctions de réseau: fonction immittance et fonction de transfert.

- Fonction immittance est le rapport de deux variables prises à la même paire de bornes.

  On définit deux types de fonctions immittances:
  - impédance (rapport tension/courant),
  - admittance (rapport courant/tension).
- Fonction de transfert est le rapport de deux variables prises à deux paires de bornes différentes.

  On définit quatre types de fonctions de transfert:
  - Impédance de transfert (rapport tension/courant),
  - Admittance de transfert (rapport courant/tension),
  - Gain en tension (rapport tension/tension),
  - Gain en courant (rapport courant/courant).

6.5.2 Fonctions de réseau d'un dipôle

La figure 6-25 montre un circuit électrique représenté sous forme d'un dipôle. Pour ce circuit, on peut définir deux fonctions de réseau:

- Impédance d'entrée: $Z_1(s) = \dfrac{V_1(s)}{I_1(s)}$

- Admittance d'entrée: $Y_1(s) = \dfrac{I_1(s)}{V_1(s)}$

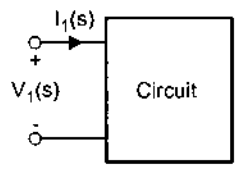


Figure 6-25 Circuit électrique représenté sous forme d'un dipôle.

L'impédance et l'admittance d'entrée sont indépendantes des conditions externes. Elles restent inchangées lorsque le dipôle est relié à d'autres circuits.

6.5.3 Fonctions de réseau d'un quadripôle

La figure 6-26 montre un circuit électrique représenté sous forme d'un quadripôle. On considère habituellement les bornes 1-1' comme l'entrée et les bornes 2-2' comme la sortie.

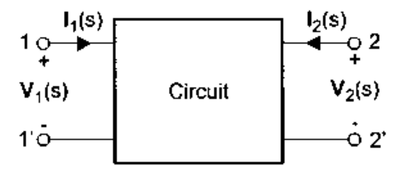


Figure 6-26 Circuit électrique représenté sous forme d'un quadripôle.

Pour ce circuit, on peut définir huit fonctions de réseau:

Impédance d'entrée $Z_1(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$

Admittance d'entrée $Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)}$

Impédance de sortie $Z_2(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)}$

Admittance de sortie $Y_2(s) = \frac{I_2(s)}{V_2(s)}$

Impédance de transfert $Z_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)}$

Admittance de transfert $Y_{12}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)}$

Gain en tension $A_{v12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$

Gain en courant $A_{i12}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$

Les impédances et les admittances d'entrée et de sortie sont indépendantes des conditions externes. Elles restent inchangées lorsque le quadripôle est relié à d'autres circuits.

Par contre, les impédances et les admittances de transfert ainsi que le gain en tension et le gain en courant dépendent des circuits reliés à la sortie du quadripôle.

6.5.4 Calcul de fonctions de réseau

Nous pouvons déterminer les différentes fonctions de réseau d'un circuit en résolvant les équations d'équilibre établies à l'aide des méthodes classiques (méthode des noeuds, méthode des mailles, etc.) dans le domaine de Laplace.

Pour certaines configurations de circuit, le calcul des fonctions de réseau peut être effectué en utilisant les combinaisons série et parallèle des impédances, les lois de diviseur de tension et diviseur de courant, etc.

Exemple 6-18 Fonctions de réseau d'un circuit RLC

Considérons le circuit montré dans la figure 6-27.

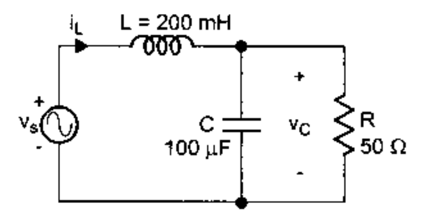


Figure 6-27 Circuit RLC .

On désire déterminer les fonctions de réseau suivantes:

- l'impédance d'entrée du circuit vue par la source,
- la fonction de transfert entre la tension de sortie v_C et la source v_s.

On convertit le circuit en domaine de Laplace en remplaçant chaque élément par son impédance et chaque variable par sa transformée comme illustre la figure 6-28.

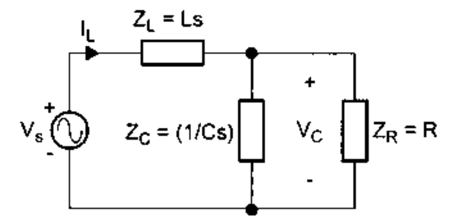


Figure 6-28 Circuit transformé.

L'impédance d'entrée du circuit est la combinaison série et parallèle des impédances du circuit:

$$Z_1(s) = \frac{V_s(s)}{I_L(s)} = Z_L + \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R} = Ls + \frac{\frac{1}{Cs} \times R}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{1 + RCs}.$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$Z_1(s) = \frac{1 \times 10^{-3} s^2 + 0.2s + 50}{5 \times 10^{-3} s + 1}$$

La fonction de transfert entre la tension de sortie et la source v_s peut être déterminée en utilisant la loi du diviseur de tension:

$$H_1(s) = \frac{V_C}{V_s} = \frac{\frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R}}{Z_L + \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R}} = \frac{Z_C Z_R}{Z_L Z_C + Z_L Z_R + Z_C Z_R} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$H_1(s) = \frac{50}{1\times10^{-3}s^2 + 0.2s + 50}$$

Exemple 6-19 Fonctions de réseau d'un circuit actif

Soit le circuit montré dans la figure 6-29.

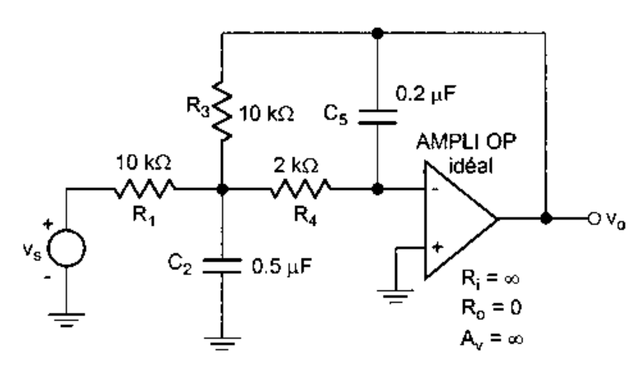


Figure 6-29 Circuit avec un AMPLI OP.

On désire déterminer les fonctions de réseau suivantes:

- l'impédance d'entrée du circuit vue par la source,
- la fonction de transfert entre la tension de sortie v_o et la tension d'entrée v_s.

Le circuit transformé dans le domaine de s est montré dans la figure 6-30.

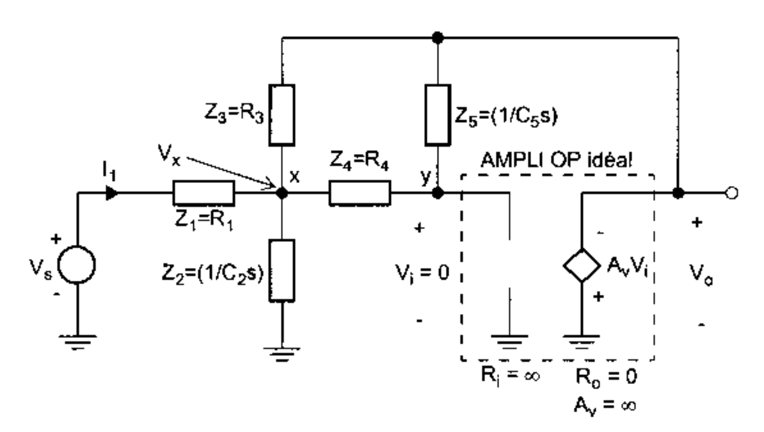


Figure 6-30 Circuit transformé.

La tension V_i est égale à 0 car l'ampli op est considéré idéal ($A_v = \infty$). Le point y est au même potentiel que la masse.

On choisit V_x comme la tension nodale du circuit. On établit l'équations d'équilibre en utilisant la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right]V_x = \frac{V_s}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_3} \tag{6-67}$$

En appliquant la loi des courants au noeud y, on obtient:

$$\frac{V_x}{Z_4} = \frac{-V_o}{Z_5}.$$

Ou encore:

$$V_x = -\frac{Z_4}{Z_5} \times V_o.$$

L'équation (6-67) devient:

$$\left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right]\left[-\frac{Z_4}{Z_5} \times V_o\right] = \frac{V_s}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_3}$$

Ou bien:

$$-\left\{\frac{1}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right)\right\}V_o = \frac{V_s}{Z_1}$$

La fonction de transfert reliant la tension V_o et la source V_s est:

$$H_1(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\frac{1}{Z_1}}{\left\{\frac{1}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right)\right\}} = \frac{-1}{\frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_5} + \frac{Z_1 Z_4}{Z_2 Z_5} + \frac{Z_1 Z_4}{Z_3 Z_5} + \frac{Z_1}{Z_5}}$$

$$H_1(s) = \frac{-R_3}{R_1 R_3 R_4 C_2 C_5 s^2 + (R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4) C_5 s + R_1}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$H_1(s) = \frac{-10000}{0.02 s^2 + 28 s + 10000}$$

L'impédance d'entrée du circuit est le rapport de V_s et I_1:

$$Z_{in}(s) = \frac{V_s}{I_1} = \frac{V_s}{\left(\frac{V_s - V_x}{Z_1}\right)} = \frac{V_s}{V_s - V_x} \times Z_1 = \frac{(V_s/V_o)}{(V_s/V_o) - (V_x/V_o)} \times Z_1$$

Ou encore:

$$Z_{in}(s) = \frac{[H_1(s)]^{-1}}{[H_1(s)]^{-1} - \left(-\frac{Z_4}{Z_5}\right)} \times Z_1$$

$$Z_{in}(s) = \frac{\frac{-(R_1 R_3 R_4 C_2 C_5 s^2 + (R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4) C_5 s + R_1)}{R_3}}{\frac{-(R_1 R_3 R_4 C_2 C_5 s^2 + (R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4) C_5 s + R_1)}{R_3} + R_4 C_5 s} \times R_1$$

$$Z_{in}(s) = \frac{R_1R_3R_4C_2C_5s^2 + (R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4)C_5s + R_1}{R_1R_3R_4C_2C_5s^2 + (R_1R_3 + R_1R_4)C_5s + R_1} \times R_1$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$Z_{in}(s) = \frac{0.02s^2 + 28s + 10000}{0.02s^2 + 24s + 10000} \times 10000$$

6.5.5 Fonction de transfert et réponse temporelle

On a vu que dans un circuit la réponse Y(s) est égale au produit de la fonction de transfert H(s) et l'excitation X(s):

$$Y(s) = H(s) \times X(s) \tag{6-68}$$

La réponse temporelle x(t) est la transformée inverse de Laplace de Y(s):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \times X(s)\} \tag{6-69}$$

La fonction $H(s) \times X(s)$ peut être décomposée en une somme de fractions partielles. En supposant que cette fonction ne possède que des pôles simples, on peut écrire:

$$Y(s) = H(s) \times X(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{K_n}{s - p_n} + \sum_{m=1}^{M} \frac{K_m}{s - p_m} \tag{6-70}$$

où p_n sont les pôles de la fonction de transfert H(s), p_m sont les pôles de l'excitation X(s), N et M sont respectivement les nombres de pôles de H(s) et X(s).

On peut remarquer que les pôles de la fonction de transfert H(s) sont également les racines de l'équation caractéristique du circuit:

$$a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0 = 0 .$$

Alors, les pôles de H(s) sont les fréquence naturelles du circuit.

La réponse temporelle x(t) est la transformée inverse de l'équation (6-70):

$$x(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} K_n e^{p_n t}}_{\text{réponse naturelle}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M} K_m e^{p_m t}}_{\text{réponse forcée}} \tag{6-71}$$

On constate que la réponse x(t) est composée de deux parties:

- la réponse naturelle $\sum_{n=1}^{N} K_n e^{p_n t}$ qui est une somme de fonctions exponentielles de fréquences égales aux fréquences naturelles du circuit,
- la réponse forcée $\sum_{m=1}^{M} K_m e^{p_m t}$ qui est une somme de fonctions exponentielles de fréquences égales aux fréquences de l'excitation.

On peut ainsi conclure que les pôles de la fonction de transfert déterminent la nature de la réponse naturelle et les pôles de l'excitation déterminent la nature de la réponse forcée.

Si l'excitation x(t) est une impulsion unitaire δ(t), X(s) = 1 et la réponse Y(s) du circuit sera égale à la fonction de transfert:

$$Y(s) = H(s).$$

Dans ce cas particulier, la réponse temporelle y(t) est appelée réponse impulsionnelle h(t) du circuit. Elle est la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert H(s):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \tag{6-72}$$

On peut dire qu'un circuit est complètement défini par sa fonction de transfert H(s) ou par sa réponse impulsionnelle h(t).

Exemple 6-20 Fonction de transfert et réponse temporelle d'un circuit RLC
Considérons le circuit RLC montré dans la figure 6-31.

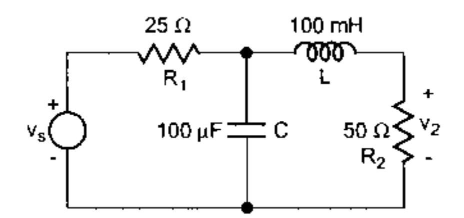


Figure 6-31 Circuit de l'exemple 6-20.

On désire déterminer la fonction de transfert qui relie v_2 à v_s, la réponse impulsionnelle du circuit et la réponse $v_2(t)$ lorsque l'excitation v_s est $100\sin(120\pi t)u(t)$.

On transforme le circuit en domaine de Laplace comme montré dans la figure 6-32.

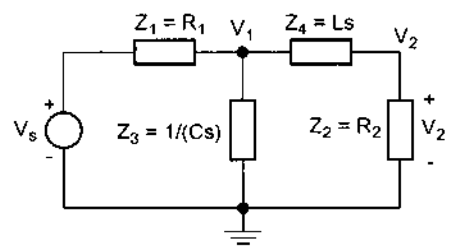


Figure 6-32 Circuit transformé.

Les équations d'équilibre sont obtenues par la méthode des noeuds:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_4} \\ -\frac{1}{Z_4} & \frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_s}{Z_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant cette équation, on obtient:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4} & \frac{V_s}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_4} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_4} \\ -\frac{1}{Z_4} & \frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{V_s}{Z_1Z_4}}{\frac{1}{Z_1Z_2}+\frac{1}{Z_1Z_4}+\frac{1}{Z_3Z_2}+\frac{1}{Z_3Z_4}+\frac{1}{Z_2Z_4}}$$

La fonction de transfert qui relie V_2 à V_s est:

$$H_1(s) = \frac{V_2}{V_s} = \frac{Z_2Z_3}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_1Z_4+Z_2Z_3+Z_3Z_4}$$

$$H_1(s) = \frac{R_2}{R_1LCs^2+(R_1R_2C+L)s+(R_1+R_2)}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$H_1(s) = \frac{50}{2.5\times10^{-4}s^2+0.225s+75}$$

Les pôles de la fonction de transfert H(s) sont les racines de l'équation caractéristique $2.5\times10^{-4}s^2+0.225s+75 = 0$:

$$p_1 = -450+j312.25 \qquad p_2 = -450+j312.25$$

La réponse impulsionnelle est la transformation inverse de Laplace de $H_1(s)$:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{50}{2.5\times10^{-4}s^2+0.225s+75}\right\}$$

La fonction de transfert $H_1(s)$ peut être décomposée en fractions partielles:

$$H_1(s) = \frac{320.256\angle-1.571}{s+450-j312.25}+\frac{320.256\angle1.571}{s+450+j312.25}$$

On déduit:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{320.256\angle-1.571}{s+450-j312.25}+\frac{320.256\angle1.571}{s+450+j312.25}\right\}$$

$$h_1(t) = 640.51e^{-450t}\cos(312.25t-1.571) = 640.51e^{-450t}\sin(312.25t)$$

La figure 6-33 montre la réponse impulsionnelle $h_1(t)$ en fonction du temps.

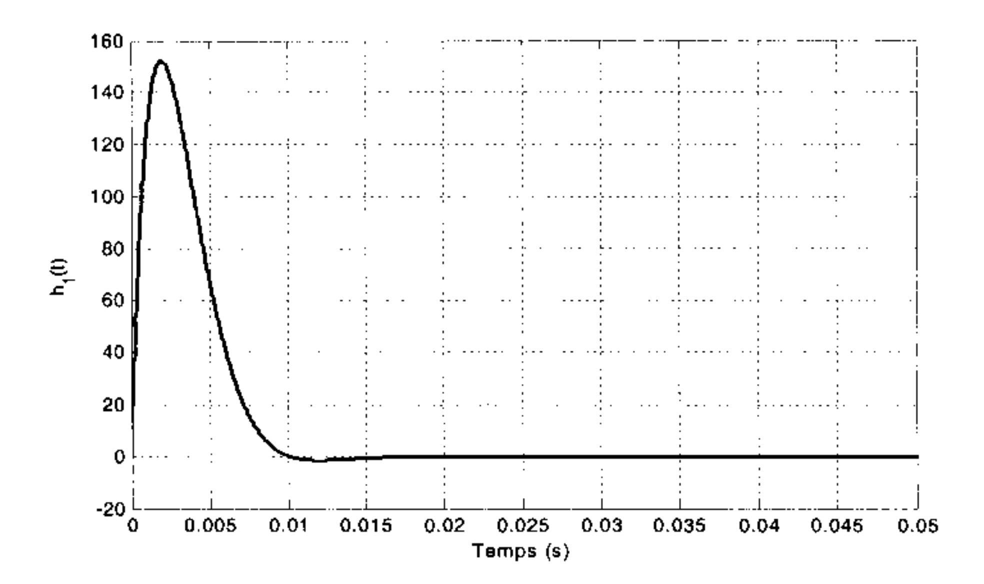


Figure 6-33 Réponse impulsionnelle du circuit RLC de l'exemple 6-20.

Si l'excitation v_s est $100\sin(120\pi t)u(t)$, sa transformée est:

$$V_s = \frac{100\times 120\pi}{s^2+(120\pi)^2} = \frac{12000\pi}{s^2+(120\pi)^2}$$

La tension de sortie V_2 est égale au produit de $H_1(s)$ et V_s:

$$V_2 = H_1(s)\times V_s = \frac{50}{2.5\times 10^{-4}s^2+0.225s+75}\times\frac{12000\pi}{s^2+(120\pi)^2}$$

$$V_2 = \frac{7.5398\times 10^9}{(s+450-j312.25)(s+450+j312.25)(s-j120\pi)(s+j120\pi)}$$

On peut décomposer V_2 en une somme de fractions partielles:

$$V_2 = \underbrace{\frac{K_1}{s+450-j312.25}+\frac{K_1^*}{s+450+j312.25}}_{\text{réponse naturelle}}+\underbrace{\frac{K_2}{s-j120\pi}+\frac{K_2^*}{s+j120\pi}}_{\text{réponse forcée}}$$

Les constantes K_1 et K_2 sont égales à:

$$K_1 = 32.262e^{-j0.721}$$

$$K_2 = 26.722e^{-j2.706}$$

La tension $v_2(t)$ est la transformée inverse de V_2:

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{32.262e^{-j0.721}}{s+450-j312.25}+\frac{32.262e^{j0.721}}{s+450+j312.25}+\frac{26.722e^{-j2.706}}{s-j120\pi}+\frac{26.722e^{j2.706}}{s+j120\pi}\right\}$$

$$v_2(t) = [64.524e^{-450t}\cos(312.25t - 0.721) + 53.444\cos(120\pi t - 2.706)]u(t)$$

La figure 6-34 montre la tension de sortie $v_2(t)$ en fonction du temps.

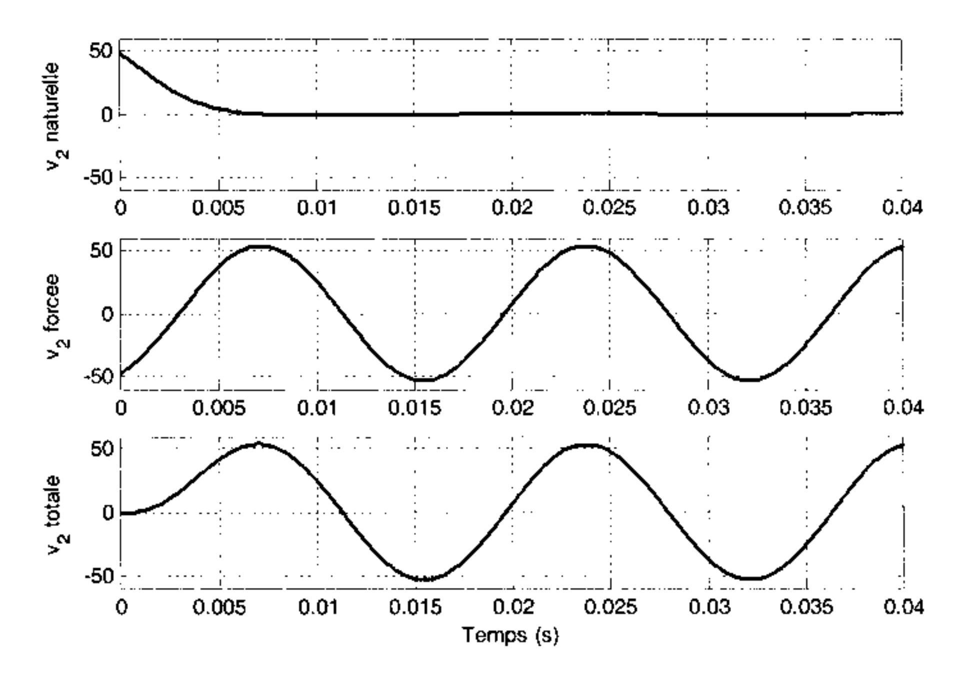


Figure 6-34 Tension de sortie $v_2(t)$ lorsque $v_s(t) = 100\sin(120\pi t)u(t)$.

Exercices

6.1 Déterminer la transformée de Laplace F(s) de chacune des fonctions du temps suivantes:

a) $f(t) = A(1 - e^{-\alpha t})u(t)$

b) $f(t) = \begin{cases} A \text{ pour } 0 \le t \le T \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \text{ pour } 0 \le t \le T \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$

d) $f(t) = t^2 e^{-5t} u(t)$

e) $f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$

f) $f(t) = 12e^{-1.5t} \cos(500t - 0.785)u(t)$

6.2 Déterminer la fonction f(t) correspondante à chacune des fonctions F(s) suivantes:

a) $F(s) = \dfrac{2s+6}{5s^3 + 15s^2 + 30s + 20}$

b) $F(s) = \dfrac{0.5s^2 - s + 0.5}{3s^3 + 9s^2 + 12s + 6}$

c) $F(s) = \dfrac{5s - 1}{0.2s^3 - 0.6s - 0.4}$

d) $F(s) = \dfrac{4}{0.5s^3 + 1.5s^2 + 2s + 1}$

e) $F(s) = \dfrac{2s+6}{5(s+1)(0.5s^2 + s + 2.5)}$

f) $F(s) = \dfrac{s+3}{7s(2s^2 + 6s + 4)}$

6.3 Le circuit montré dans la figure E6-3 est initialement au repos.

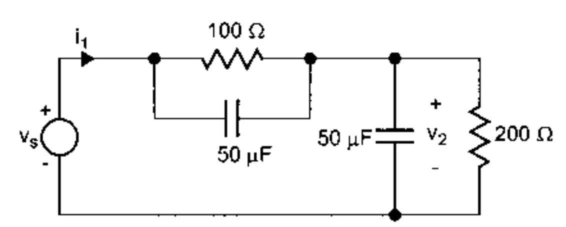


Figure E6-3

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100u(t). Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(120πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.4 Le circuit montré dans la figure E6-4 est initialement au repos.

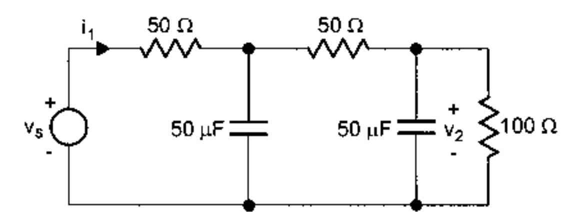


Figure E6-4

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Déterminer les fréquences naturelles du circuit. Quelle sera la durée du régime transitoire?

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

d) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=120cos(400πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.5 Le circuit montré dans la figure E6-5 est initialement au repos.

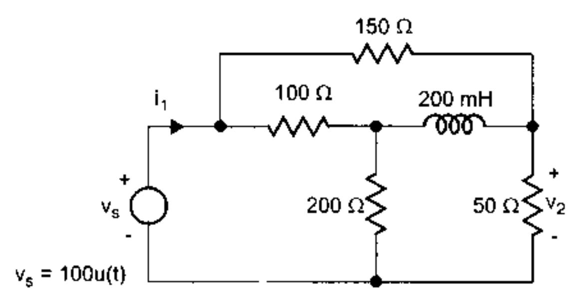


Figure E6-5

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert

$H_1(s) = \dfrac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100u(t). Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(120πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.6 Le circuit montré dans la figure E6-6 est initialement au repos.

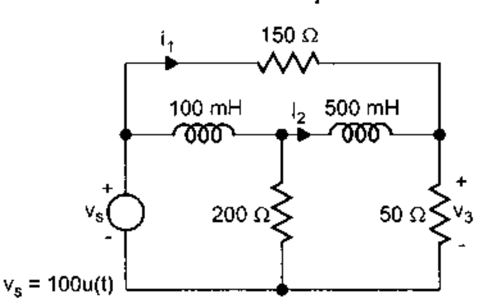


Figure E6-6

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3.

b) Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1, le courant i_2 et la tension v_3 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(500πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.7 Le circuit montré dans la figure E6-7 est initialement au repos.

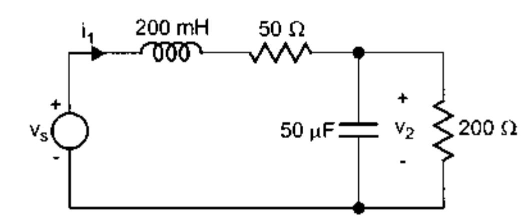


Figure E6-7

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \dfrac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert

$H_1(s) = \dfrac{V_2}{V_s}$.

b) Déterminer les fréquences naturelles du circuit. Quelle sera la durée du régime transitoire?

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

d) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(500πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.8 Le circuit montré dans la figure E6-8 est initialement au repos.

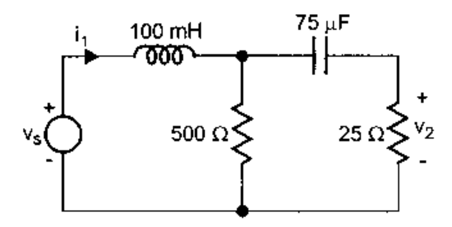


Figure E6-8

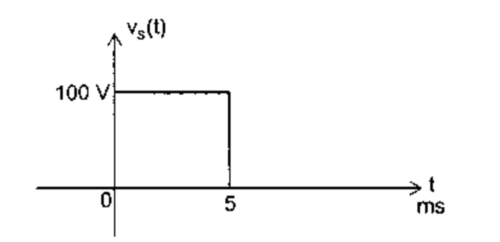
a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Déterminer les fréquences naturelles du circuit. Quelle sera la durée du régime transitoire?

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

d) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=100cos(400πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.9 Le circuit montré dans la figure E6-9 est initialement au repos.



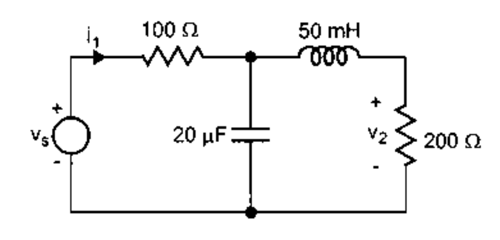


Figure E6-9

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s est l'impulsion carrée montrée dans la figure E6-9.

6.10 Le circuit montré dans la figure E6-10 est initialement au repos.

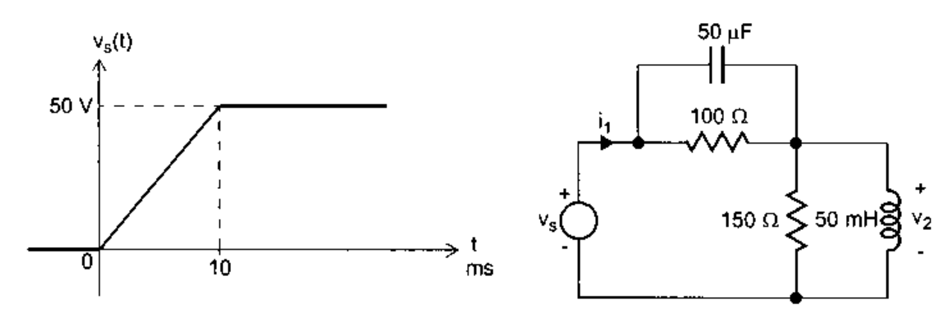


Figure E6-10

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s est la fonction montrée dans la figure E6-10.

6.11 Le circuit montré dans la figure E6-11 est initialement au repos.

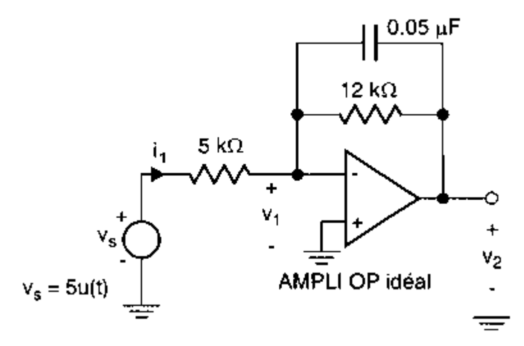


Figure E6-11

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où $v_s = 5\sin(1000\pi t)u(t)$. Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.12 Le circuit montré dans la figure E6-12 est initialement au repos.

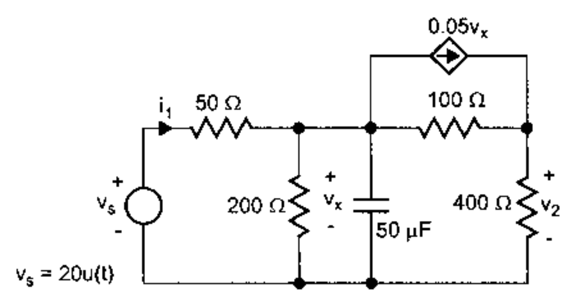


Figure E6-12

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

Quelle est la durée du régime transitoire? Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.13 Le circuit montré dans la figure E6-13 est initialement au repos.

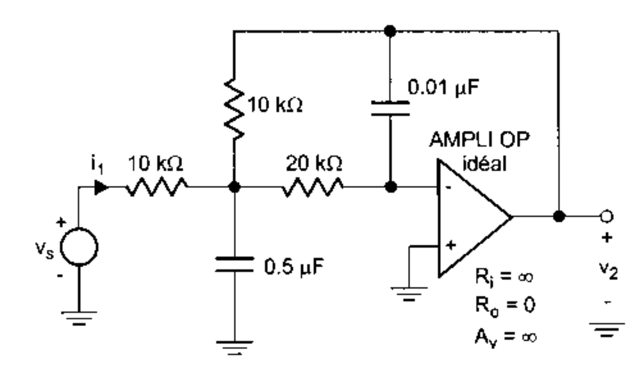


Figure E6-13

a) Déterminer l'impédance $Z_{eq}(s) = \frac{V_s}{I_1}$ vue par la source v_s et la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{V_2}{V_s}$.

b) Utilisant les résultats de la partie a, déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=10u(t). Quelle est la durée du régime transitoire?

Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

c) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2 pour le cas où v_s=15cos(1000πt)u(t). Déduire le courant i_1 et la tension v_2 en régime permanent.

6.14 Soit le circuit montré dans la figure E6-14.

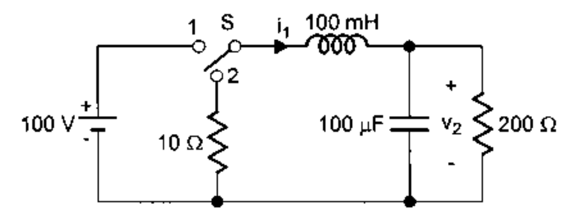


Figure E6-14

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette dernière position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire?

6.15 Soit le circuit montré dans la figure E6-15.

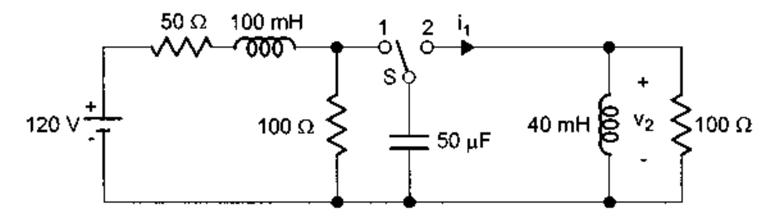


Figure E6-15

Le commutateur S est à la position 1 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 1 à 2 et demeure à cette dernière position pour le reste du temps.

a) Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

b) Quelle est la durée du régime transitoire?

6.16 Soit le circuit montré dans la figure E6-16.

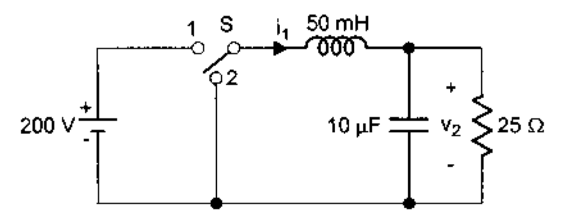


Figure E6-16

Le commutateur S est à position 2 depuis très longtemps. À t = 0, S change de position de 2 à 1 et demeure à cette position jusqu'à t = 5 ms. À t = 5 ms, S revient à la position 2 et demeure à cette position pour le reste du temps.

Déterminer et tracer en fonction du temps le courant i_1 et la tension v_2.

Chapitre 7

ANALYSE DES CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT

Dans ce chapitre, une méthode opérationnelle permettant d'analyser en régime permanent les circuits excités par des sources sinusoïdales est présentée. Dans ce cas particulier, toutes les variables du circuit sont sinusoïdales et de même fréquence que l'excitation. Ainsi, seules les amplitudes complexes sont impliquées dans les calculs. Dans la deuxième partie du chapitre, le comportement des circuits en régime sinusoïdal permanent est étudié en fonction de la fréquence. Le calcul de la puissance en régime sinusoïdal permanent est également considéré.

7.1 Régime sinusoïdal permanent - Notions de phaseur et d'impédance

Les sources sinusoïdales sont utilisées de façon universelle comme source d'énergie dans les systèmes de puissance ou comme signal test dans les circuits de signaux. Dans ces systèmes, on s'intéresse particulièrement aux réponses en régime permanent. D'où la nécessité de développer une méthode d'analyse spécifique et efficace pour ce cas.

Lorsqu'une source sinusoïdale $x(t) = X\cos(\omega t)$ est appliquée à un circuit électrique linéaire, la réponse totale est composée de deux réponses distinctes:

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}}_{\text{Réponse naturelle}} + \underbrace{Y\cos(\omega t + \phi)}_{\text{Réponse forcée}} \qquad (7\text{-}1)$$

La réponse naturelle est une somme d'exponentielles $A_k e^{s_k t}$ où les fréquences s_k sont les racines de l'équation caractéristiques. Ces fréquences naturelles ne dépendent que de la nature du circuit. Si le circuit est *stable*, les fréquences naturelles s_k sont réelles négatives ou complexes conjuguées avec une partie réelle négative.

La réponse forcée est une fonction sinusoïdale d'amplitude Y, de pulsation ω (la même que l'excitation), et déphasée d'un angle ϕ par rapport à l'excitation.

Un certain temps après l'application de l'excitation, la réponse naturelle s'annule et la réponse du circuit est constituée uniquement de la réponse forcée. Le circuit est alors en *régime sinusoïdal permanent* (RSP). La réponse permanente est donc:

$$y_P(t) = Y\cos(\omega t + \phi) \qquad (7\text{-}2)$$

Pour déterminer cette réponse en régime sinusoïdal permanent, nous avons besoin seulement de déterminer l'amplitude Y et la phase ϕ, la pulsation ω étant connue.

Nous allons présenter deux notions fondamentales qui sont nécessaires à l'analyse de circuits électriques en régime sinusoïdal permanent: phaseur et impédance.

7.1.1 Phaseur (ou Amplitude complexe)

Considérons une fonction sinusoïdale x(t):

$$x(t) = X\cos(\omega t + \phi) \tag{7-3}$$

où X est l'amplitude,
ω est la fréquence angulaire (ou pulsation) en rad/s,
ϕ est la phase en radian.

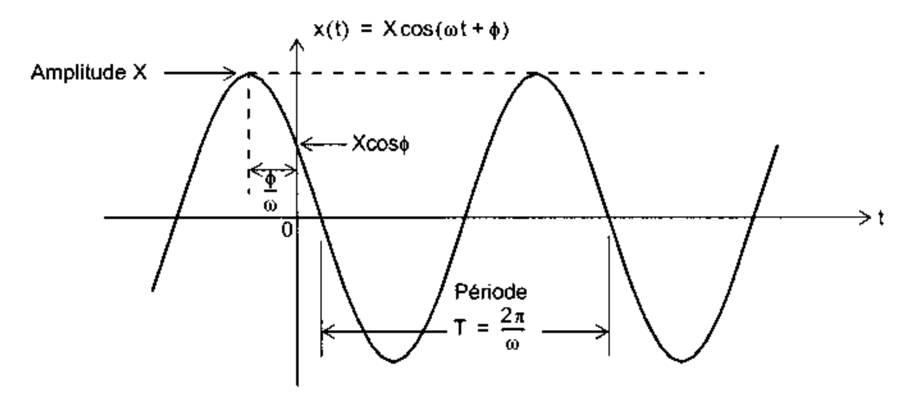


Figure 7-1 Fonction sinusoïdale.

On peut exprimer la fonction x(t) comme la *partie réelle* d'une fonction exponentielle complexe:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\{Xe^{j\phi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\} \tag{7-4}$$

L'exponentielle complexe $Xe^{j\phi}e^{j\omega t}$ peut être représentée par un *vecteur tournant* dans le plan complexe comme illustre Fig. 7-2.

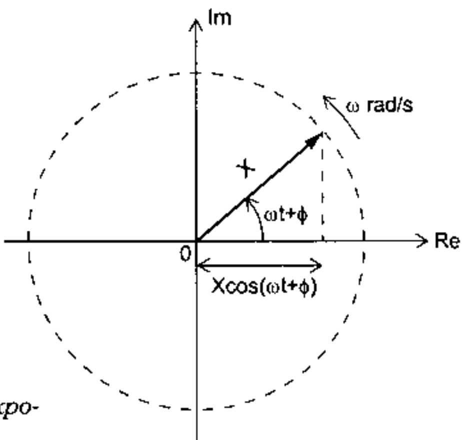


Figure 7-2 Vecteur tournant qui représente l'exponentielle $Xe^{j(\omega t+\phi)}$ dans le plan complexe.

La fonction x(t) = Xcos(ωt+φ) est la projection du vecteur tournant $Xe^{j\phi}e^{j\omega t}$ sur l'axe réel.

La quantité complexe **X** = $Xe^{j\phi}$ est appelée l'*amplitude complexe* ou le *phaseur* qui représente la fonction sinusoïdale x(t) = Xcos(ωt+φ). On peut remarquer que le phaseur contient seulement l'information sur l'amplitude et la phase de la fonction sinusoïdale x(t).

On peut représenter un phaseur par un vecteur (fixe) dans le plan complexe, comme montré dans la figure 7-3.

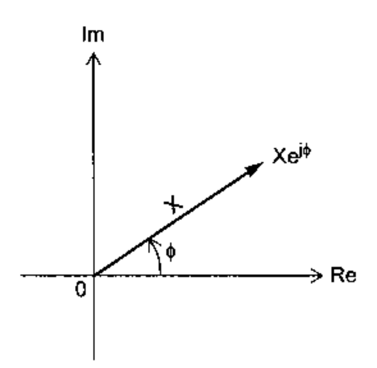


Figure 7-3 Vecteur représentant le phaseur $Xe^{j\phi}$.

Remarques:

- Par habitude, on ne trace pas toujours les axes réel et imaginaire dans un diagramme vectoriel représentant les phaseurs.
- On utilise également la notation $X\angle\phi$ pour désigner le phaseur $Xe^{j\phi}$.

7.1.2 Impédance et admittance en RSP

Considérons la relation v-i d'une résistance:

v = Ri

En RSP, si le courant est $i(t) = I\cos(\omega t)$, la tension v(t) sera:

$$v(t) = RI\cos(\omega t) \qquad (7\text{-}5)$$

On peut constater que la tension v(t) et le courant i(t) dans une résistance sont en phase. On peut convertir la relation v-i (7-5) en une relation entre le phaseur tension **V** et le phaseur **I** comme illustre la figure 7-4.

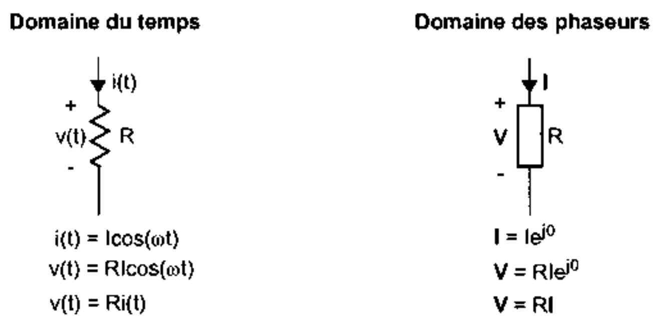


Figure 7-4 La résistance dans le domaine des phaseurs.

La relation **V** = R**I** peut être représentée dans le plan complexe par un *diagramme vectoriel* comme illustre la figure 7-5b.

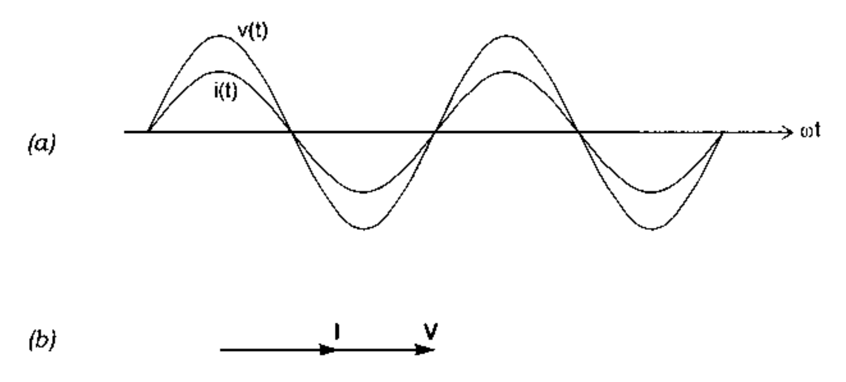


Figure 7-5 Tension et courant d'une résistance en RSP.
(a) Dans le domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

Considérons la relation v-i d'une inductance: $v = L\frac{di}{dt}$

En RSP, si le courant est $i(t) = I\cos(\omega t)$, la tension v(t) sera:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}\{I\cos(\omega t)\} = -L\omega I\sin(\omega t) \tag{7-6}$$

On peut constater que dans une inductance le courant i(t) est *en retard de phase* de 90° par rapport à la tension v(t). On dit aussi que la tension v(t) est *en avance de phase* de 90° par rapport au courant i(t). On peut convertir la relation v-i (7-6) en une relation entre le phaseur tension **V** et le phaseur **I** comme illustre la figure 7-6.

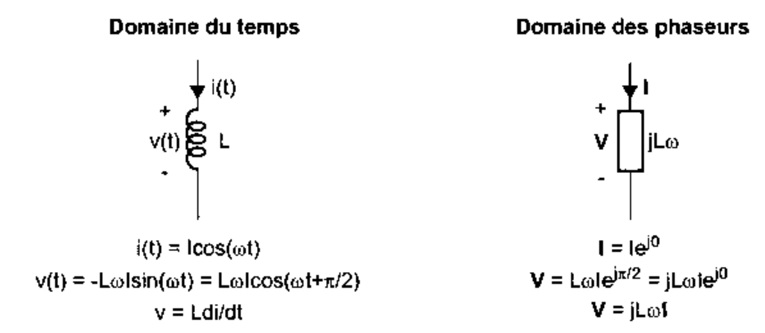


Figure 7-6 L'inductance dans le domaine des phaseurs.

La relation **V** = jω**LI** peut être représentée dans le plan complexe par un diagramme vectoriel comme illustre la figure 7-7b.

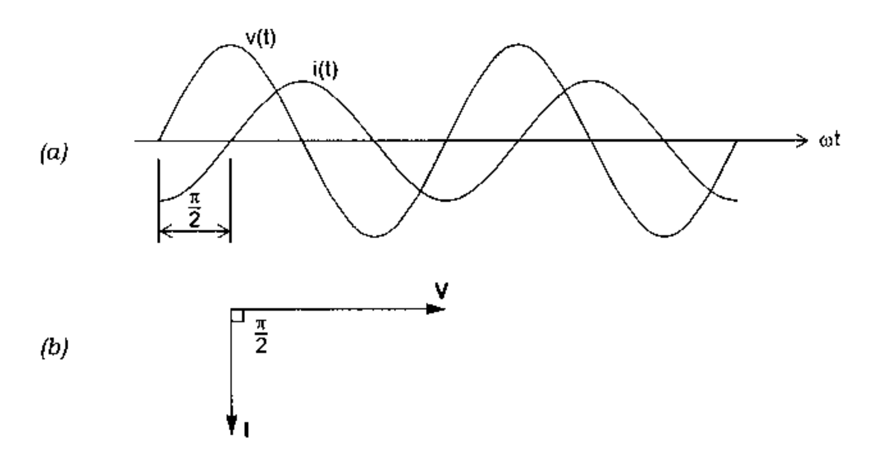


Figure 7-7 Tension et courant d'une inductance en RSP.
(a) Dans le domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

Considérons la relation v-i d'un condensateur: $i = C\frac{dv}{dt}$

En RSP, si la tension est $v(t) = V\cos(\omega t)$, le courant i(t) sera:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}\{V\cos(\omega t)\} = -C\omega V\sin(\omega t) \tag{7-7}$$

On peut constater que dans un condensateur, le courant i(t) est *en avance de phase* de 90° par rapport à la tension v(t). On dit aussi que la tension v(t) est *en retard de phase* de 90° par rapport au courant i(t). On peut convertir la relation v-i (7-7) en une relation entre le phaseur tension **V** et le phaseur **I** comme illustre la figure 7-8.

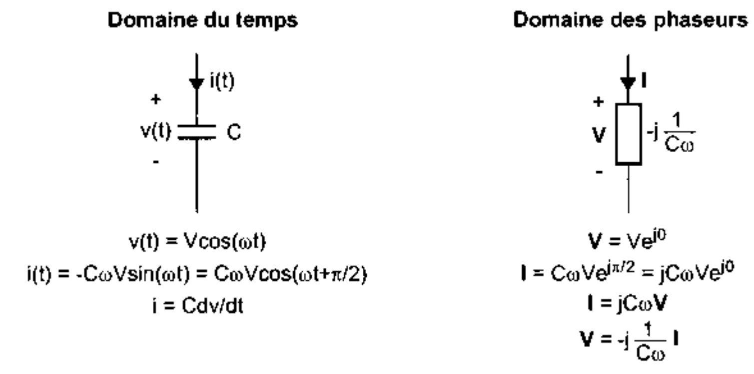


Figure 7-8 Le condensateur dans le domaine des phaseurs.

La relation **I** = jωC**V** (ou **V** = **I**/jωC) peut être représentée dans le plan complexe par un diagramme vectoriel comme illustre la figure 7-9b.

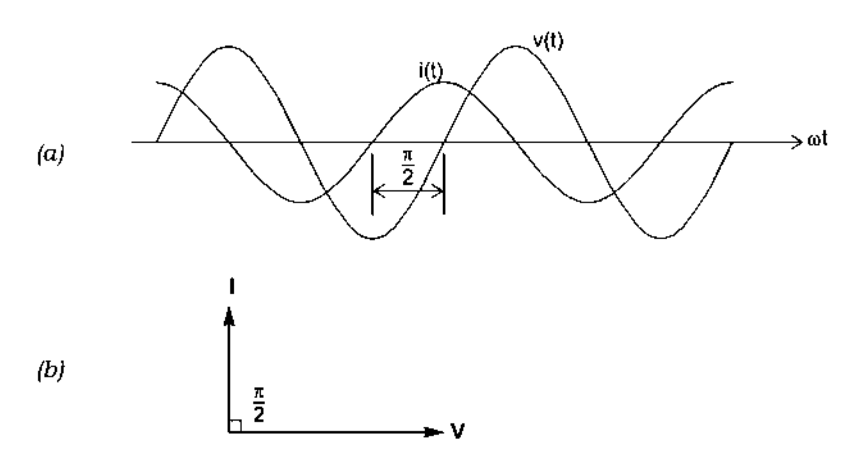


Figure 7-9 Tension et courant d'un condensateur en RSP.
(a) Dans le domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

Nous constatons que la relation entre le phaseur **V** et le phaseur **I** des trois éléments R, L, C est de la forme suivante:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}(j\omega)\mathbf{I} \tag{7-8}$$

La quantité complexe $\mathbf{Z}(j\omega)$ est définie comme *l'impédance en RSP* de l'élément.

Élément	Impédance $\mathbf{Z}(j\omega)$
Résistance R	R
Inductance L	$jL\omega$
Condensateur C	$-j\dfrac{1}{C\omega}$

Tableau 7-1 Impédance en RSP des éléments électriques.

L'admittance en RSP d'un élément est l'inverse de son impédance:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{1}{\mathbf{Z}(j\omega)} \tag{7-9}$$

On peut généraliser la notion d'impédance en RSP à des dipôles électriques: l'impédance en RSP d'un dipôle est égale au rapport du phaseur tension **V** à ses bornes et du phaseur courant **I** qui le traverse. On écrit:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{7-10}$$

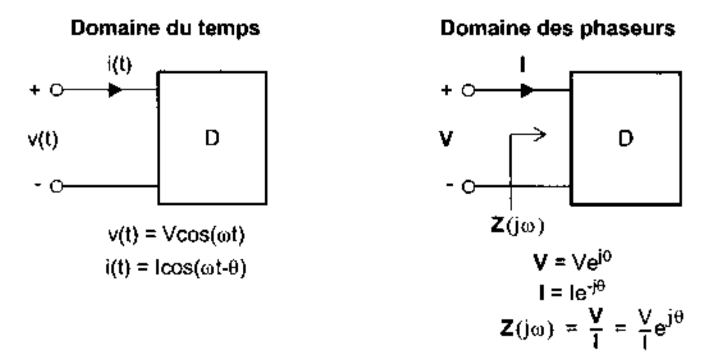


Figure 7-10 Impédance en RSP d'un dipôle.

La relation **V** = **Z**(jω)**I** peut être représentée dans le plan complexe par un diagramme vectoriel comme illustre la figure 7-11b.

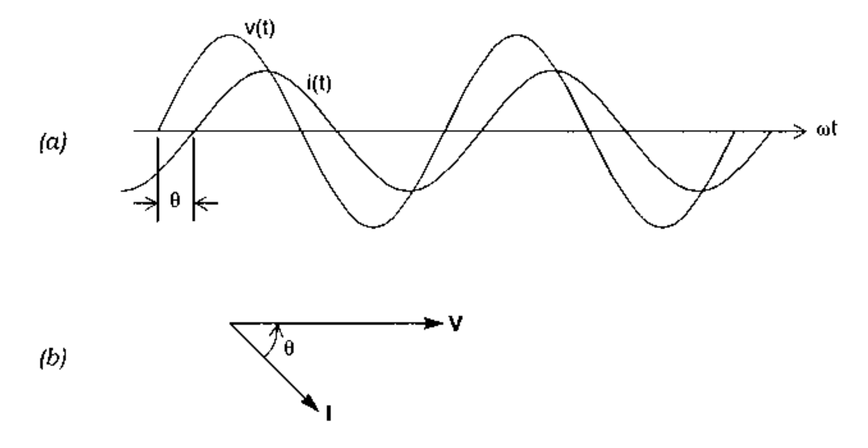


Figure 7-11 Tension et courant d'un dipôle en RSP.
(a) Dans le domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

On peut remarquer que l'angle de déphasage θ entre la tension v(t) et le courant i(t) est représenté dans le plan complexe comme l'angle entre le phaseur tension **V** et le phaseur courant **I**.

De façon générale, l'impédance **Z** d'un dipôle est complexe:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R + jX = Ze^{j\theta} \tag{7-11}$$

La partie réelle R est appelée la *résistance*. La partie imaginaire X est appelée la *réactance*. L'unité utilisée pour R et X est Ohm (Ω).

Le module de **Z**(jω) est $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. L'angle de **Z**(jω) est $\theta = \operatorname{atan}\left[\frac{X}{R}\right]$

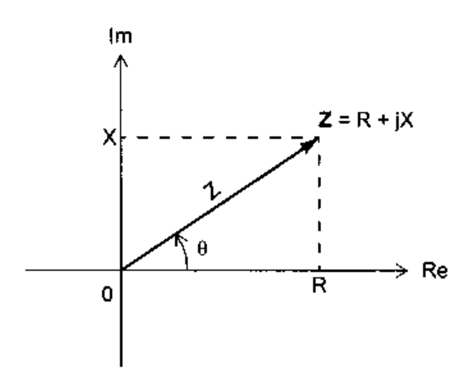


Figure 7-12 Représentation graphique d'une impédance Z = R + jX.

La nature du dipôle est déterminée par l'angle θ de son impédance **Z**:

- $\theta = 90°$: l'impédance **Z** est purement inductive,
- $0° < \theta < 90°$: l'impédance **Z** est inductive,
- $\theta = 90°$: l'impédance **Z** est purement résistive,
- $-90° < \theta < 0°$: l'impédance **Z** est capacitive,
- $\theta = -90°$: l'impédance **Z** est purement capacitive.

L'admittance **Y** d'un dipôle est l'inverse de son impédance **Z**:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{1}{\mathbf{Z}(j\omega)} = G + jB \qquad (7\text{-}12)$$

La partie réelle G s'appelle la *conductance* et la partie imaginaire B s'appelle la *susceptance*. L'unité utilisée pour G et B est Siemens (S).

Exemple 7-1 Calcul d'impédance

Les formes d'ondes de tension et de courant d'un dipôle sont montrées dans la figure 7-13.

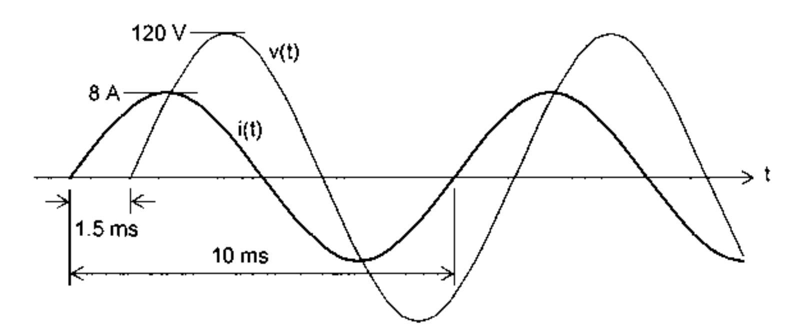


Figure 7-13 Tension et courant d'un dipôle en RSP.

La période de la tension et du courant est T = 10 ms. La fréquence est égale à:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10\times10^{-3}} = 100\,\text{Hz}.$$

La tension **V** est prise comme référence de phase:

$$\mathbf{V} = 120e^{j0} = 120\angle 0\,\text{V}.$$

Le courant est en avance de phase par rapport à la tension d'un angle de:

$$\theta = \frac{1.5}{10} \times 2\pi = 0.9425 \text{ rad (ou } 54°).$$

Le phaseur courant **I** est:

$$I = 8e^{j\theta} = 8e^{j0.9425} \text{ A}$$

L'impédance **Z** est égale à:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120e^{j0}}{8e^{j0.9425}} = 15e^{-j0.9425} = (8.817 - j12.135)\,\Omega.$$

C'est une impédance capacitive de 15 Ω avec un angle de -0.9425 rad (ou -54°). La résistance est égale à 8.817 Ω et la réactance est égale à -12.135 Ω.

La figure 7-14 montre la représentation de l'impédance **Z** dans le plan complexe.

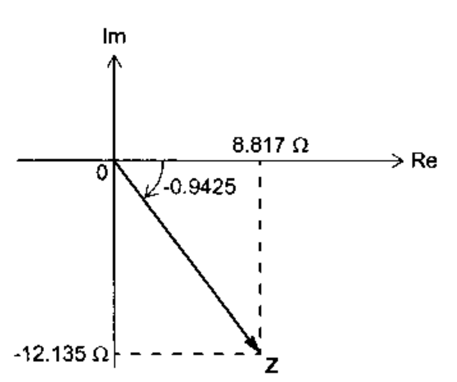


*Figure 7-14 Représentation graphique de **Z** = (8.817 - j12.135) Ω.*

7.2 Analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal permanent

7.2.1 Méthode d'analyse

L'analyse d'un circuit électrique en régime sinusoïdal permanent peut être effectuée *dans le domaine des phaseurs* en se basant sur les notions de phaseur et d'impédance présentées dans le paragraphe précédent.

Le processus de l'analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal permanent est illustré dans la figure 7-15.

On convertit le circuit électrique à analyser (composé d'éléments et de sources) en un *circuit transformé* dans le domaine des phaseurs en remplaçant chaque élément par son impédance RSP et chaque variable par son phaseur.

On peut transformer également les lois et les théorèmes du domaine du temps en des lois et des théorèmes dans le domaine des phaseurs. Le comportement du circuit dans le domaine des phaseurs est décrit par des *équations algébriques* .

La résolution de ces équations algébriques nous donnera la réponse dans le domaine des phaseurs. La transformation inverse permettra d'obtenir la réponse en domaine du temps.

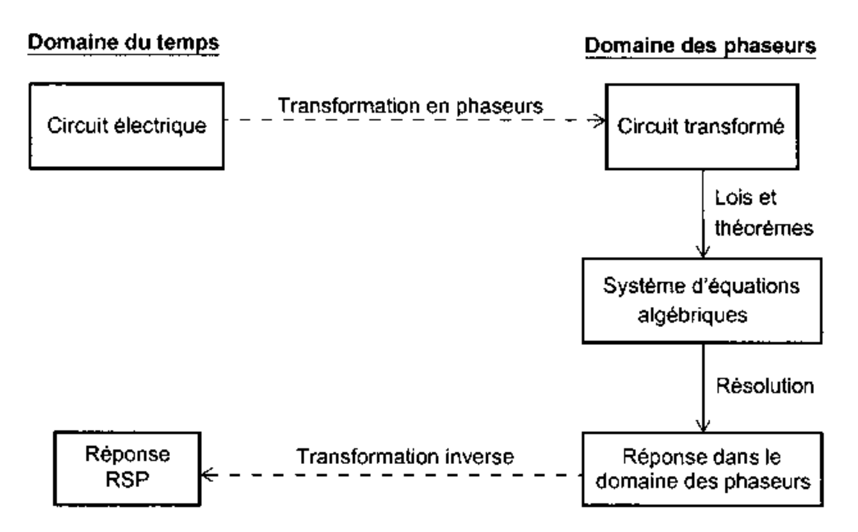


Figure 7-15 Analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal permanent dans le domaine des phaseurs.

On peut suivre les étapes décrites ci-après:

1. Transformer le circuit en domaine des phaseurs en remplaçant chaque élément par son impédance en RSP.
2. Représenter les variables tension et courant par des phaseurs.
3. Établir les équations d'équilibre en appliquant les lois et théorèmes ainsi que les méthodes habituelles du domaine du temps.
4. Résoudre les équations de phaseurs.

Il est important de noter que dans le domaine des phaseurs, toutes les quantités sont complexes. Par conséquent, tous les calculs sont des calculs complexes.

7.2.2 Lois et théorèmes dans le domaine des phaseurs

Les lois et théorèmes du domaine du temps peuvent être transposés pour s'appliquer aux phaseurs.

Lois de Kirchhoff

• Loi des courants: $\sum_{k=1}^{N} \mathbf{I}_k = 0$ à un noeud

• Loi des tensions: $\sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k = 0$ dans un parcours fermé

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre dans le domaine des phaseurs sont établies de la même façon que dans le domaine du temps en utilisant les mêmes méthodes. La méthode des mailles et la méthode des noeuds s'appliquent intégralement.

Équivalent de deux impédances RSP en série

L'impédance équivalente de deux impédances connectées en série est égale à la somme des deux impédances:

$$Z_{eq} = Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega) \quad (7\text{-}13)$$

La tension aux bornes de chaque impédance est donnée par la loi du *diviseur de tension*:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \quad (7\text{-}14)$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \quad (7\text{-}15)$$

où **V** est la tension totale.

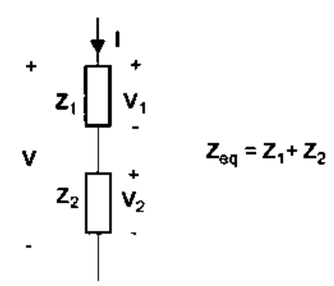


Figure 7-16 Équivalent de deux impédances en série.

Équivalent de deux impédances RSP en parallèle

L'impédance équivalente de deux impédances connectées en parallèle est égale à:

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega)} = \frac{Z_1(j\omega) \times Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \quad (7\text{-}16)$$

Le courant dans chaque branche est donnée par la loi du *diviseur de courant*:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \quad (7\text{-}17)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \quad (7\text{-}18)$$

où **I** est le courant total.

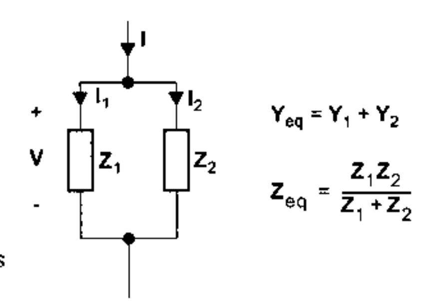


Figure 7-17 Équivalent de deux impédances en parallèle.

Équivalent Thévenin d'un dipôle

L'équivalent Thévenin d'un dipôle est composé d'une source de tension $\mathbf{V}_T$ en série avec une impédance $\mathbf{Z}_T$ tel qu'illustre la figure 7-18. Les éléments de l'équivalent Thévenin sont définis:

- Source de tension Thévenin $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}|_{\mathbf{I}=0}$ = tension aux bornes a-b en circuit ouvert,
- Impédance Thévenin $\mathbf{Z}_T$ = impédance vue aux bornes a-b lorsque toutes les sources indépendantes dans le dipôle sont annulées.

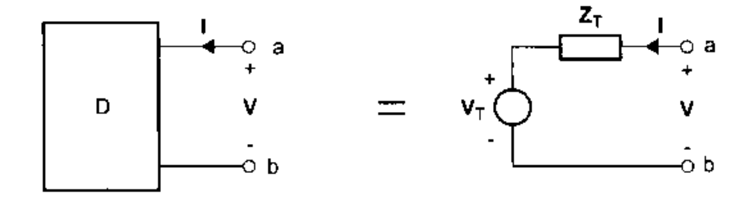


Figure 7-18 Équivalent Thévenin d'un dipôle.

Équivalent Norton d'un dipôle

L'équivalent Norton d'un dipôle est composé d'une source de courant $\mathbf{I}_N$ en parallèle avec une impédance $\mathbf{Z}_N$ tel qu'illustre la figure 7-19. Les éléments de l'équivalent Norton sont définis:

- Source de courant Norton $\mathbf{I}_N = -\mathbf{I}|_{\mathbf{V}=0}$ = -courant en court-circuit du dipôle,
- Impédance Norton $\mathbf{Z}_T$ = impédance vue aux bornes a-b lorsque toutes les sources indépendantes dans le dipôle sont annulées.

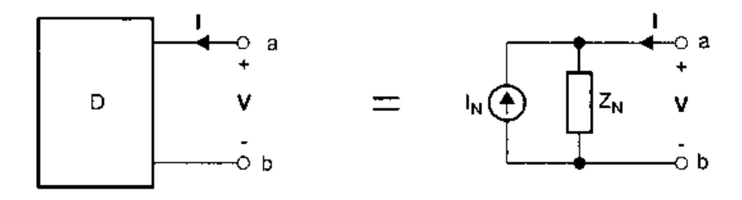


Figure 7-19 Équivalent Norton d'un dipôle.

Exemple 7-2 Analyse d'un circuit en RSP

Le circuit montré dans la figure 7-20 est en régime sinusoïdal permanent.
On désire calculer les tensions et les courants du circuit.

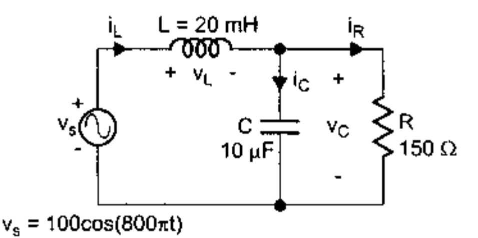


Figure 7-20 Circuit RLC en régime sinusoïdal permanent.

On transforme le circuit en RSP en remplaçant chaque élément par son équivalent RSP et chaque variable par son phaseur comme illustre la figure 7-21.
On a:

$$\mathbf{V}_s = 100e^{j0} = 100\angle 0$$

$$\mathbf{Z}_L = j20\times 10^{-3}\times 800\pi = j50.27\Omega$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j10\times 10^{-6}\times 800\pi} = -j39.79\Omega$$

$$\mathbf{Z}_R = 150\Omega$$

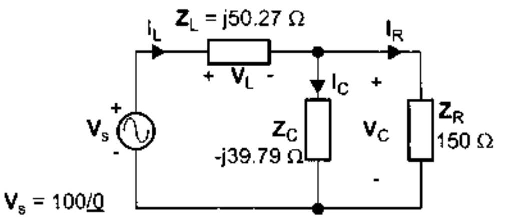


Figure 7-21 Circuit transformé.

L'impédance équivalente vue par la source V_s est égale à la combinaison série et parallèle des impédances:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_L + \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_R}{\mathbf{Z}_C+\mathbf{Z}_R} = j50.27 + \frac{(-j39.79)150}{150-j39.79} = 9.86 + j13.096 = 16.393\angle 0.925\,\Omega$$

Le courant I_L est égal à:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\angle 0}{16.393\angle 0.925} = 6.1\angle -0.925\,\text{A}$$

On utilise les équivalents série et parallèle et les diviseurs de tensions et de courants pour calculer les tensions et les courants du circuit.
On a:

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{Z}_R}{\mathbf{Z}_C+\mathbf{Z}_R}\mathbf{I}_L = \frac{150}{150-j39.79}(6.1\angle -0.925) = 5.896\angle -0.666\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I}_L - \mathbf{I}_C = (6.1\angle -0.925) - (5.897\angle -0.666) = 1.564\angle -2.237\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{Z}_L\mathbf{I}_L = (j50.27)(6.1\angle{-0.925}) = 306.65\angle 0.645 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_R\mathbf{I}_R = 150(1.564\angle{-2.237}) = 234.61\angle{-2.237} \text{ V}$$

À partir des phaseurs, on peut écrire les expressions temporelles des tensions et des courants du circuit:

$$i_L(t) = 6.1\cos(800\pi t - 0.925)$$

$$i_C(t) = 5.896\cos(800\pi t - 0.666)$$

$$i_R(t) = 1.564\cos(800\pi t - 2.237)$$

$$v_L(t) = 306.65\cos 800\pi t + 0.6465$$

$$v_C(t) = 234.61\cos(800\pi t - 2.237)$$

Les formes d'ondes des tensions et des courants du circuit sont montrées dans la figure 7-22.

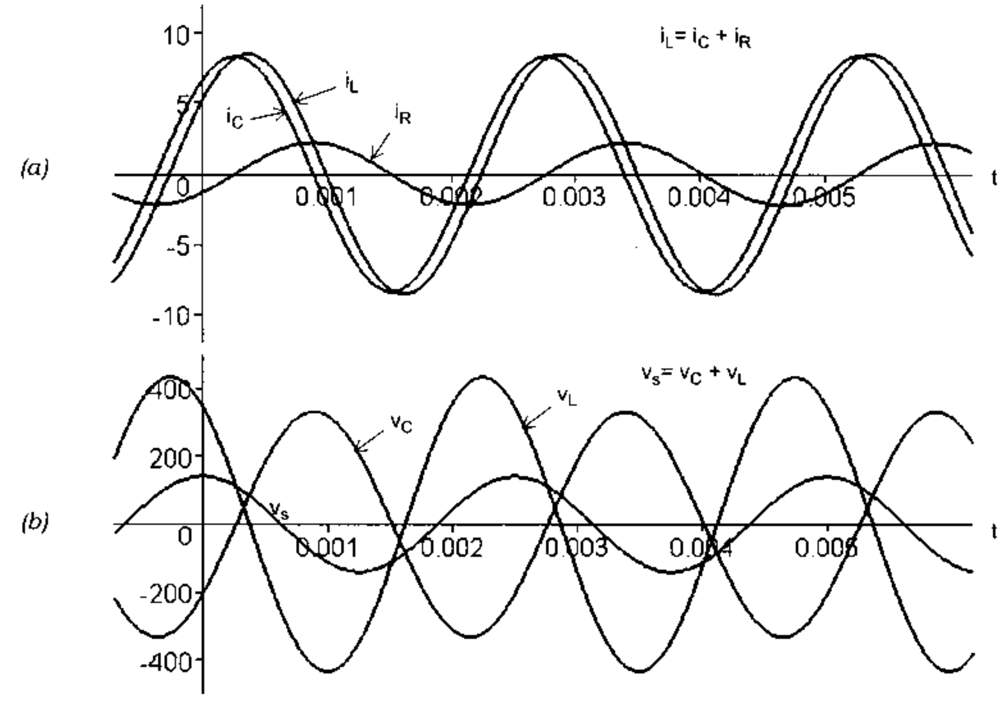


Figure 7-22 Formes d'ondes du circuit de la figure 7-20. (a) Courants. (b) Tensions.

7.2.3 Diagramme vectoriel

Considérons le circuit de l'exemple 7-2. Les relations entre les tensions et les courants dans le domaine du temps s'écrivent:

$$v_s(t) = v_L(t) + v_C(t)$$

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}\{i_L(t)\}$$

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}\{v_C(t)\}$$

$$v_C(t) = Ri_R(t)$$

Ces relations peuvent être transposées dans le domaine de phaseur:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{V}_L = jL\omega\mathbf{I}_L$$

$$\mathbf{I}_C = j\omega C\mathbf{V}_C$$

$$\mathbf{V}_C = R\mathbf{I}_R$$

On peut illustrer ces relations dans le plan complexe où chaque variable (phaseur) est représentée par un vecteur qui indique le module et l'angle de la variable. Ce diagramme s'appelle *diagramme vectoriel.*

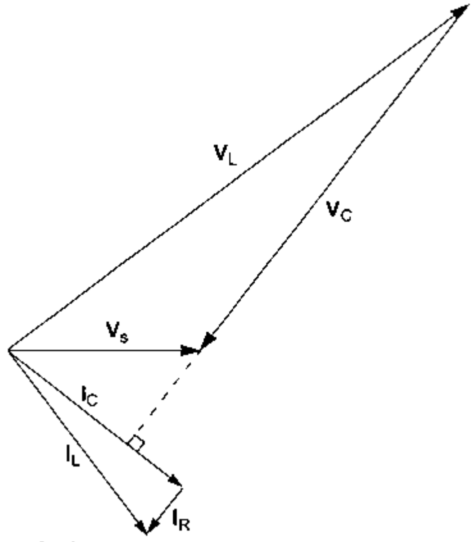


Figure 7-23 Diagramme vectoriel illustrant les relations entre les tensions et les courants de l'exemple 7-2.

7.3 Réponse en fréquence

7.3.1 Impédance des éléments R, L, C en fonction de la fréquence

Nous avons vu que les impédances des éléments R, L, C en régime sinusoïdal permanent sont:

$$\mathbf{Z}_R(j\omega) = R$$

$$\mathbf{Z}_L(j\omega) = j\omega L$$

$$\mathbf{Z}_C(j\omega) = -j\frac{1}{C\omega}$$

L'impédance de la résistance est indépendante de la fréquence angulaire ω de la source d'excitation tandis que l'impédance de l'inductance et celle du condensateur en dépendent. Par conséquent, lorsque la fréquence de l'excitation varie, les tensions et les courants dans un circuit en RSP varieront.

La figure 7-24 montre l'impédance des trois éléments R, L, C en fonction de la fréquence ω.

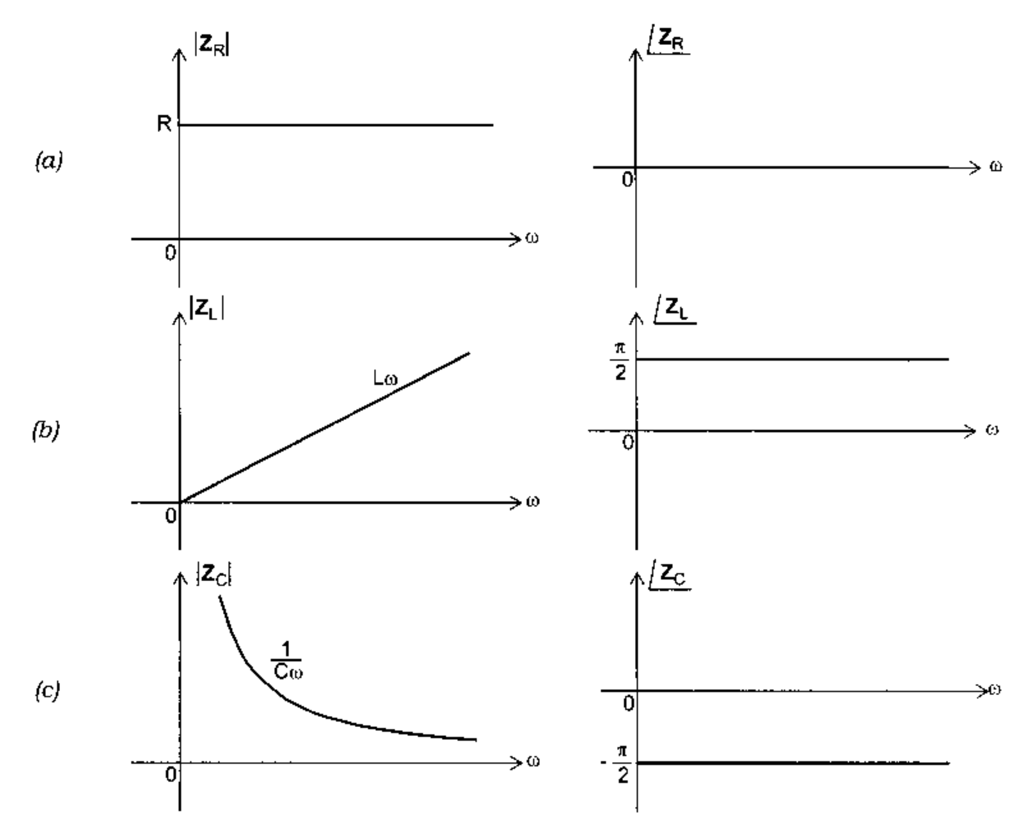


Figure 7-24 Impédance des éléments R, L, C en fonction de la fréquence. (a) Impédance de R. (b) Impédance de L. (c) Impédance de C.

Remarque:
La fréquence angulaire ω (en rad/s) est égale à $2\pi f$ (f est la fréquence en Hz). Cependant, on utilise souvent le terme générique « fréquence » pour désigner indifféremment ω et f.

Exemple 7-3 Comportement d'un circuit RLC en fonction de la fréquence
Considérons le circuit RLC montré dans la figure 7-25.

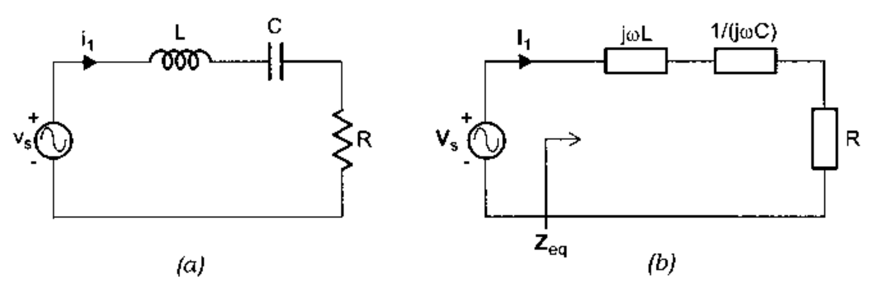


Figure 7-25 Circuit RLC en RSP.
(a) En domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

L'impédance équivalente vue par la source est la combinaison série des impédances:

$$Z_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Cette impédance est une fonction de la fréquence angulaire ω. La partie réelle (résistance) est constante tandis que la partie imaginaire (réactance) dépend de ω:

Résistance = R,

Réactance = $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$.

Lorsque $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la réactance est négative. L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance R en série avec un condensateur de valeur $\frac{C}{1 - LC\omega^2}$.

Lorsque $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la réactance est nulle. L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance R. On dit que le circuit RLC est en résonance et la fréquence $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la fréquence de résonance.

Lorsque $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la réactance est positive. L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance R en série avec une inductance de valeur $L - \frac{1}{C\omega^2} = L\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{LC\omega^2}\right)$.

Application numérique
Considérons le cas où R = 10 Ω, L = 50 mH et C = 100 μF.
La fréquence de résonance est:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{50\times10^{-3}\times100\times10^{-6}}} = 447.21\ \text{rad/s.}$$

- Lorsque ω = 250 rad/s, l'impédance Z_{eq} est égale à:

$$Z_{eq}(250) = 10+j\left(50\times10^{-3}\times250-\frac{1}{100\times10^{-6}\times250}\right) = 10-j27.5 = 30.208\angle{-1.144}\,\Omega$$

L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance de 10 Ω en série avec un condensateur de valeur 145.45 μF.

- Lorsque $\omega = \omega_R$ = 447.21 rad/s, l'impédance Z_{eq} est égale à:

$$Z_{eq}(\omega_R) = 10+j\left(50\times10^{-3}\times447.21-\frac{1}{100\times10^{-6}\times447.21}\right) = 10 = 10\angle0\,\Omega$$

L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance de 10 Ω.

- Lorsque ω = 550 rad/s, l'impédance Z_{eq} est égale à:

$$Z_{eq}(550) = 10+j\left(50\times10^{-3}\times550-\frac{1}{100\times10^{-6}\times550}\right) = 10+j9.318 = 13.668\angle0.750\,\Omega.$$

L'impédance Z_{eq} est alors équivalente à une résistance de 10 Ω en série avec une inductance de valeur 16.9 mH.

7.3.2 Fonctions de réseau RSP

Dans un circuit en régime sinusoïdal permanent, la réponse $\mathbf{Y}(j\omega)$ et l'excitation $\mathbf{X}(j\omega)$ sont reliées par une équation algébrique. Le rapport de la réponse $\mathbf{Y}(j\omega)$ et l'excitation $\mathbf{X}(j\omega)$ est définie comme une *fonction de réseau RSP* $\mathbf{H}(j\omega)$:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{X}(j\omega)} \tag{7-19}$$

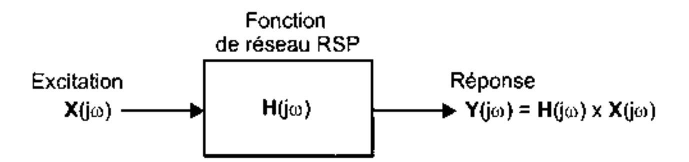


Figure 7-26 Définition de fonction de réseau RSP.

Pour un circuit donné, on peut définir plusieurs fonctions de réseau RSP suivant la réponse considérée. Les fonctions de réseau RSP d'un circuit ne dépendent que de sa topologie et de la nature de ses éléments.

On distingue deux sortes de fonctions de réseau RSP: fonction immittance et fonction de transfert.

- <u>Fonction immittance</u> est le rapport de deux variables prises à la même paire de bornes.

  On définit deux types de fonctions immittances:
  - impédance (rapport tension/courant),
  - admittance (rapport courant/tension).
- <u>Fonction de transfert</u> est le rapport de deux variables prises à deux paires de bornes différentes.

On définit quatre types de fonctions de transfert:
- Impédance de transfert (rapport tension/courant),
- Admittance de transfert (rapport courant/tension),
- Gain en tension (rapport tension/tension),
- Gain en courant (rapport courant/courant).

Les différentes fonctions de réseau RSP d'un circuit sont définies dans le tableau 7-2.

Fonction de réseau RSP		$\mathbf{H}(j\omega)$
Immittance	Impédance	$\mathbf{Z}_1(j\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_1(j\omega)}{\mathbf{I}_1(j\omega)}$
	Admittance	$\mathbf{Y}_1(j\omega) = \dfrac{\mathbf{I}_1(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)}$
Fonction de transfert	Impédance de transfert	$\mathbf{Z}_{12}(j\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{I}_1(j\omega)}$
	Admittance de transfert	$\mathbf{Y}_{12}(j\omega) = \dfrac{\mathbf{I}_2(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)}$
	Gain en tension	$\mathbf{A}_{v12}(j\omega) = \dfrac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)}$
	Gain en courant	$\mathbf{A}_{i12}(j\omega) = \dfrac{\mathbf{I}_2(j\omega)}{\mathbf{I}_1(j\omega)}$

Tableau 7-2 Fonctions de réseau RSP.

7.3.3 Calcul de fonctions de réseau RSP

Nous pouvons déterminer les différentes fonctions de réseau RSP d'un circuit en résolvant les équations d'équilibre établies à l'aide des méthodes classiques (méthode des mailles, méthode des noeuds, etc.).

Pour certaines configurations de circuit, le calcul des fonctions de réseau peut être simplifié en utilisant les combinaisons série et parallèle des impédances, les lois de diviseur de tension et diviseur de courant, etc.

On peut aussi déterminer en premier lieu la fonction de réseau H(s) dans le domaine de s. En remplaçant ensuite s par $j\omega$, on obtiendra la fonction de réseau RSP $H(j\omega)$.

Exemple 7-4 Fonctions de réseau RSP d'un circuit RLC

Considérons le circuit montré dans la figure 7-27.

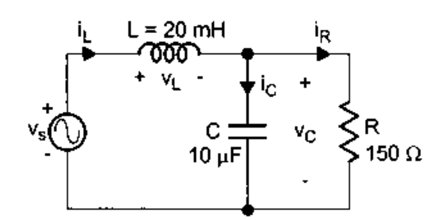


Figure 7-27 Circuit RLC en RSP.

La source de tension v_s est une source sinusoïdale de fréquence angulaire ω.

On désire déterminer les fonctions de réseau suivantes:
- l'impédance d'entrée du circuit vue par la source
- la fonction de transfert entre la tension de sortie v_C et la source v_s

On convertit le circuit en RSP en remplaçant chaque élément par son impédance RSP et chaque variable par son phaseur comme illustre la figure 7-28.

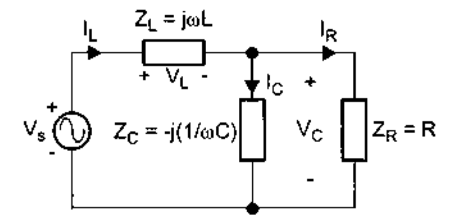


Figure 7-28 Circuit transformé.

L'impédance d'entrée du circuit est la combinaison série et parallèle des impédances du circuit:

$$\mathbf{Z}_{in}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_L} = Z_L + \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R} = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C}R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{(R - RLC\omega^2) + j\omega L}{1 + jRC\omega}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$\mathbf{Z}_{in}(j\omega) = \frac{(150 - 3 \times 10^{-5}\omega^2) + j0.02\omega}{1 + j0.0015\omega}$$

La fonction de transfert entre la sortie et l'entrée peut être déterminée en utilisant la loi du diviseur de tension:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{V}_s} = \frac{\frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R}}{Z_L + \frac{Z_C Z_R}{Z_C + Z_R}} = \frac{Z_C Z_R}{Z_L Z_C + Z_L Z_R + Z_C Z_R} = \frac{R}{(R - RLC\omega^2) + j\omega L}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{150}{(150 - 3 \times 10^{-5}\omega^2) + j0.02\omega}$$

7.3.4 Réponse en fréquence

En général, une fonction de réseau $\mathbf{H}(j\omega)$ est une *fonction complexe* de ω. On peut exprimer la fonction $\mathbf{H}(j\omega)$ sous forme polaire:

$$\mathbf{H}(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \tag{7-20}$$

où:

$A(\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)|$ est l'amplitude de $H(j\omega)$,

$\phi(\omega) = \angle\mathbf{H}(j\omega)$ est la phase de $H(j\omega)$.

Les deux fonctions $A(\omega)$ et $\phi(\omega)$ constituent la *réponse en fréquence* du circuit. Elles représente le comportement du circuit en RSP en fonction de la fréquence de l'excitation.

Pour illustrer la réponse en fréquence d'un circuit, on peut utiliser *deux graphiques* représentant $A(\omega)$ et $\phi(\omega)$.

7.3.5 Réponse en fréquence d'un circuit du premier ordre

Considérons le circuit RL montré dans la figure 7-29.

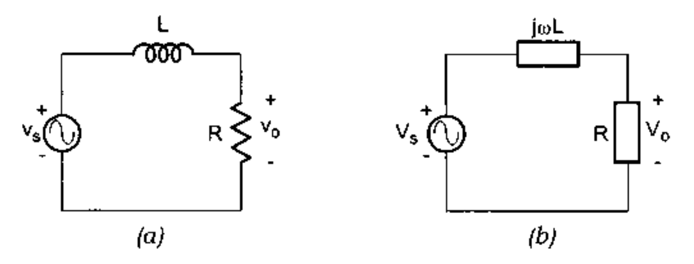


Figure 7-29 Circuit RL en RSP.
(a) En domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

La fonction de transfert qui relie V_o à V_s est obtenue par la loi du diviseur de tension:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{R/L}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \tag{7-21}$$

Dans cette relation, la quantité ω_c=R/L est définie comme la *fréquence de coupure* de la fonction de transfert $\mathbf{H}_1(j\omega)$.

Nous avons: $$A_1(\omega) = |\mathbf{H}_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

et $$\phi_1(\omega) = \angle\mathbf{H}_1(j\omega) = -\text{atan}\left[\frac{\omega}{\omega_c}\right].$$

La réponse en fréquence de ce circuit RL est montrée dans la figure 7-30.

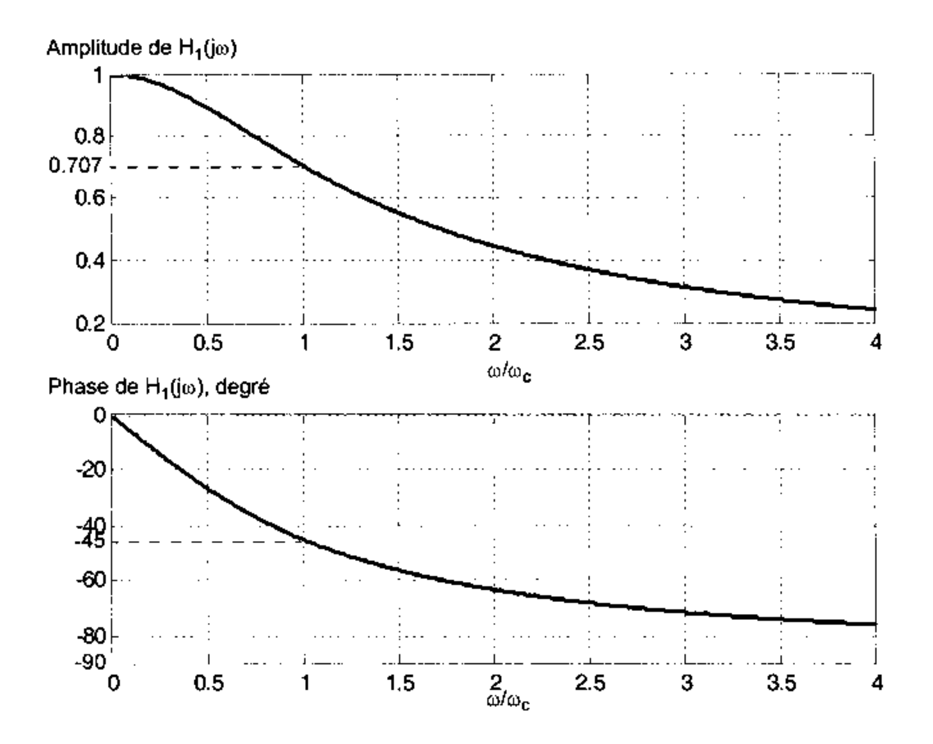


Figure 7-30 Réponse en fréquence du circuit RL de la figure 7-29.

On peut remarquer que pour ce circuit RL, à la fréquence de coupure ω_C:

- l'amplitude de la fonction de transfert est égale à 0.707 fois sa valeur à la fréquence 0,
- la phase de la fonction de transfert est égale à -45°.

Considérons maintenant le circuit RC montré dans la figure 7-31.

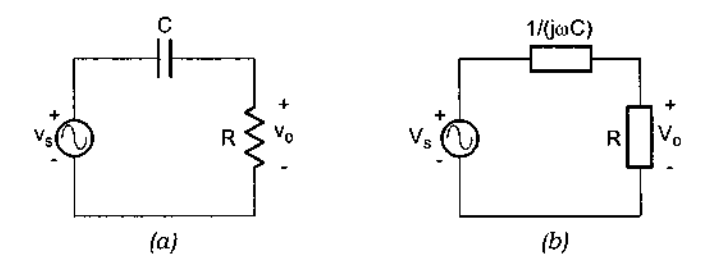


Figure 7-31 Circuit RC en RSP.
(a) En domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

La fonction de transfert qui relie V_o à V_s est obtenue par la loi du diviseur de tension:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j(\omega/\omega_c)}{1 + j(\omega/\omega_c)} \tag{7-22}$$

Dans cette relation, la quantité $\omega_c = 1/RC$ est définie comme la *fréquence de coupure* de la fonction de transfert $\mathbf{H}_1(j\omega)$.

Nous avons: $$A_1(\omega) = |\mathbf{H}_1(j\omega)| = \frac{(\omega/\omega_c)}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$$

et $$\phi_1(\omega) = \angle\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(\omega/\omega_c)$$

La réponse en fréquence de ce circuit RC est montré dans la figure 7-32.

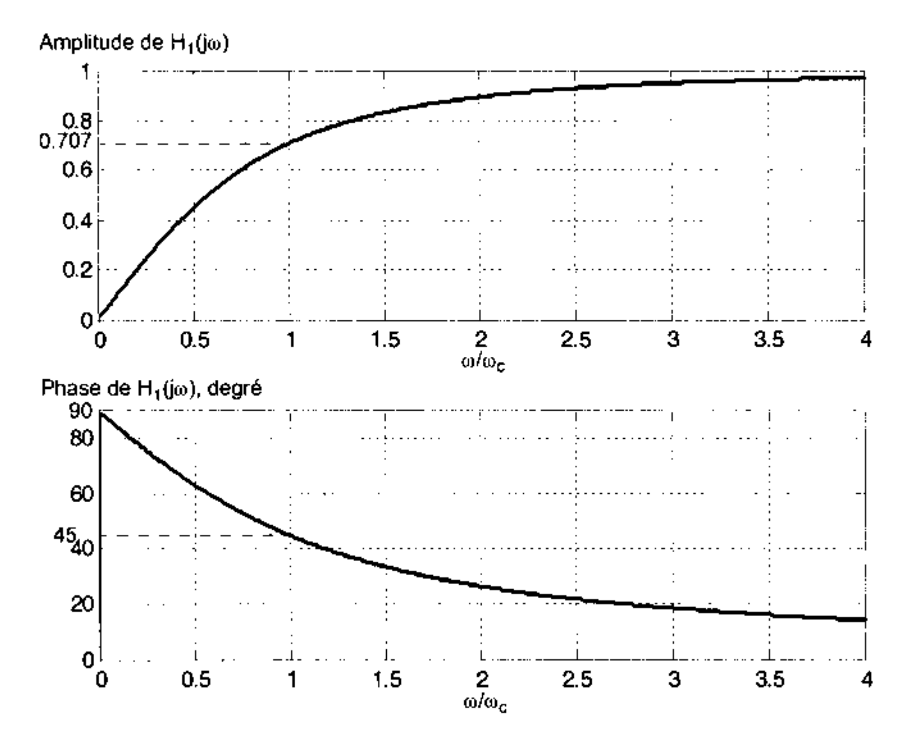


Figure 7-32 Réponse en fréquence du circuit RC de la figure 7-31.

On peut remarquer que pour ce circuit RC, à la fréquence de coupure ω_c:

- l'amplitude de la fonction de transfert est égale à 0.707 fois sa valeur à la fréquence ∞,
- la phase de la fonction de transfert est égale à 45°.

Nous constatons que le comportement de ce circuit RC en fonction de la fréquence est le contraire de celui du circuit RL considéré précédemment.

7.3.6 Réponse en fréquence d'un circuit du deuxième ordre

Considérons le circuit RLC montré dans la figure 7-33.

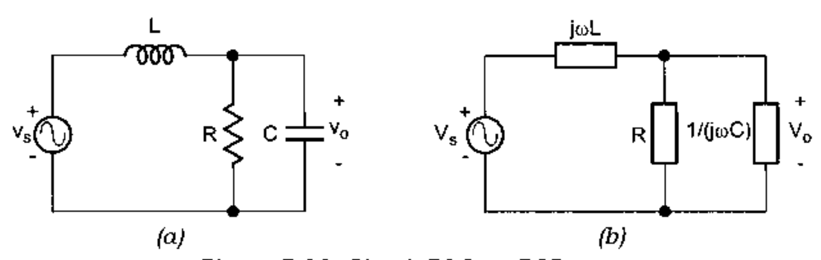


Figure 7-33 Circuit RLC en RSP.
(a) En domaine du temps. (b) Dans le domaine des phaseurs.

La fonction de transfert qui relie V_o à V_s est obtenue par la loi du diviseur de tension:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{\dfrac{R}{1 + jRC\omega}}{j\omega L + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + \dfrac{L(j\omega)}{R} + 1} \qquad (7\text{-}23)$$

On peut exprimer la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ sous la forme suivante:

$$\mathbf{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1} \qquad (7\text{-}24)$$

avec: $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ est la fréquence naturelle non amortie,

$\zeta = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ est le coefficient d'amortissement.

Nous avons: $$A_1(\omega) = |\mathbf{H}_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

et $$\phi_1(\omega) = \angle\mathbf{H}_1(j\omega) = -\text{atan}\left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right]$$

La réponse en fréquence de ce circuit RLC est montré dans la figure 7-34.

Nous constatons que la réponse en fréquence de ce circuit du deuxième ordre dépend du coefficient d'amortissement ζ.

• Cas où $\zeta > 0.707$:

L'amplitude $A(\omega)$, égale à 1 pour $\omega = 0$, décroît de façon monotone vers 0 lorsque la fréquence augmente. À la fréquence ω_n, on a $A(\omega_n) = 1/2\zeta$.

La phase $\phi(\omega)$, égale à 0 pour $\omega = 0$, décroît lorsque la fréquence augmente et tend vers $(-\pi)$ quand ω tend vers ∞. À la fréquence ω_n, on a $\phi(\omega_n) = -\pi/2$, peu importe la valeur de ζ.

• Cas où $\zeta = 0.707$:

L'amplitude $A(\omega)$, égale à 1 pour $\omega = 0$, décroît de façon monotone de 1 vers 0 lorsque la fréquence augmente. À la fréquence ω_n, on a $A(\omega_n) = 0.707$.

La phase $\phi(\omega)$ varie de la même façon que dans le cas où $\zeta > 0.707$.

• <u>Cas où $\zeta < 0.707$</u>:

L'amplitude $A(\omega)$, égale à 1 pour $\omega = 0$, croît pour atteindre un maximum à une fréquence ω_r donnée par:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = \omega_n\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \tag{7-25}$$

où $Q = 1/2\zeta$.

Ce phénomène s'appelle la *résonance* et la fréquence ω_r est la *fréquence de résonance*.

Le paramètre Q s'appelle le *facteur de résonance* du circuit.

À la fréquence de résonance, $A(\omega)$ a comme valeur:

$$A(\omega_r) = A_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \tag{7-26}$$

Dépassant la fréquence de résonance, $A(\omega)$ décroît et tend vers 0 lors que la fréquence augmente vers ∞.

On remarque que plus ζ est faible (plus Q est grand), plus la fréquence de résonance est proche de ω_n et plus A_{max} est grande.

La phase $\phi(\omega)$, égale à 0 pour $\omega = 0$, décroît lorsque la fréquence augmente et tend vers $(-\pi)$ quand ω tend vers ∞. À la fréquence ω_n, on a $\phi(\omega_n) = -\pi/2$, peu importe la valeur de ζ. La variation de la phase à ω_n est de plus en plus brusque lorsque ζ s'approche de 0.

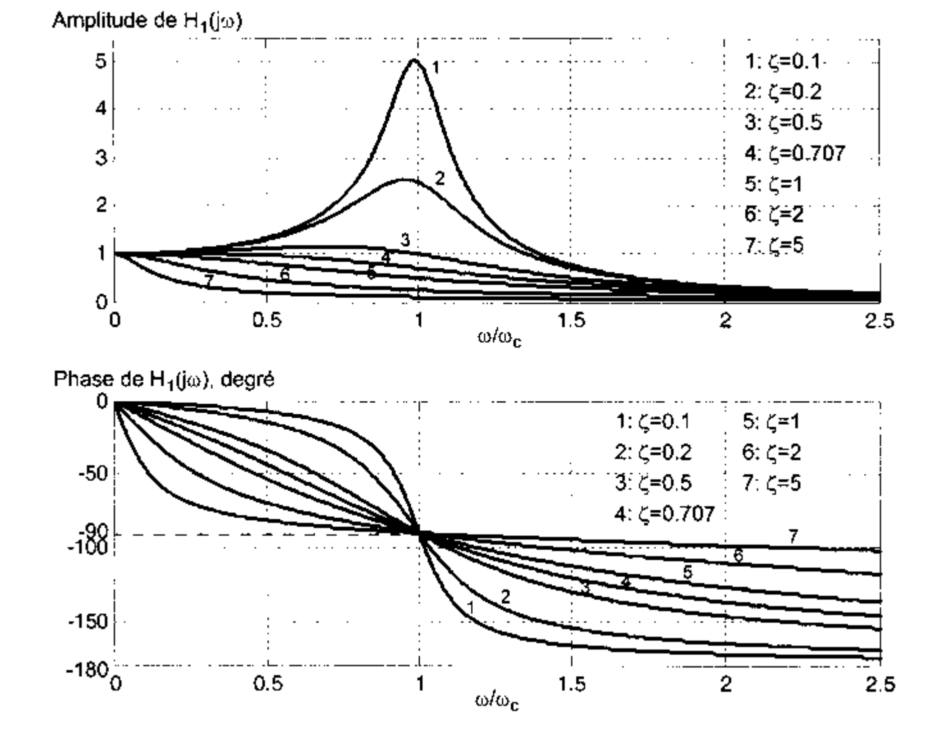


Figure 7-34 Réponse en fréquence du circuit RLC de la figure 7-33.

7.3.7 Réponse en fréquence d'un circuit général

La réponse en fréquence d'un circuit d'ordre plus élevé que deux peut être déterminée en suivant les mêmes étapes présentées précédemment.

Exemple 7-5 Réponse en fréquence d'un circuit du troisième ordre
Considérons le circuit montré dans la figure 7-35.

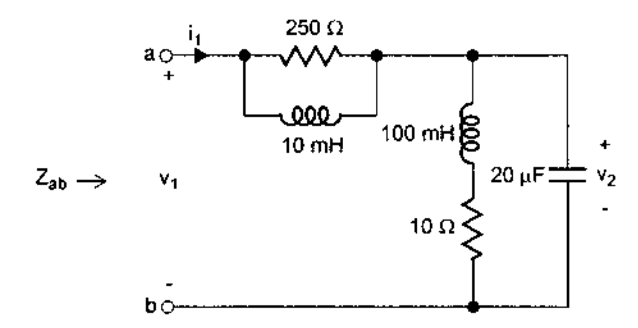


Figure 7-35 Un circuit du troisième ordre.

On désire déterminer l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ vue aux bornes a-b du circuit et la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$.

On peut convertir le circuit en impédances complexes comme illustre la figure 7-36.

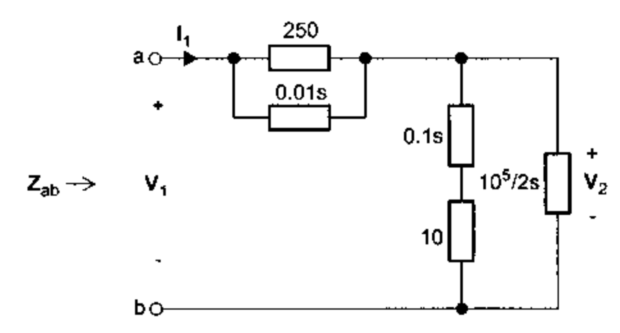


Figure 7-36 Le circuit de la figure 7-35 converti en impédances complexes.

L'impédance $Z_{ab}(s)$ est égale à la combinaison série et parallèle des impédances du circuit:

$$Z_{ab}(s) = \frac{250 \times 0.01s}{250 + 0.01s} + \frac{(0.1s + 10) \times \left(\frac{0.5 \times 10^5}{s}\right)}{(0.1s + 10) + \left(\frac{0.5 \times 10^5}{s}\right)}$$

$$Z_{ab}(s) = \frac{0.25s^3 + 75s^2 + 1.38 \times 10^6 s + 1.25 \times 10^8}{0.001s^3 + 25.1s^2 + 3000s + 1.25 \times 10^7}$$

En remplaçant s par $j\omega$ dans cette expression, on obtient:

$$Z_{ab}(j\omega) = \frac{[1.25 \times 10^8 - 75\omega^2] + j[1.38 \times 10^6 \omega - 0.25\omega^3]}{[1.25 \times 10^7 - 25.1\omega^2] + j[3000\omega - 0.001\omega^3]}$$

L'amplitude de l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ est égale à:

$$|Z_{ab}(j\omega)| = \frac{\sqrt{[1.25\times10^8 - 75\omega^2]^2 + [1.38\times10^6\omega - 0.25\omega^3]^2}}{\sqrt{[1.25\times10^7 - 25.1\omega^2]^2 + [3000\omega - 0.001\omega^3]^2}}$$

La phase de l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ est égale à:

$$\angle Z_{ab}(j\omega) = \text{atan}\left[\frac{13.8\times10^5\omega - 0.25\omega^3}{1.25\times10^8 - 75\omega^2}\right] - \text{atan}\left[\frac{3000\omega - 0.001\omega^3}{1.25\times10^7 - 25.1\omega^2}\right]$$

La figure 7-37 montre l'amplitude et la phase de l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ en fonction de la fréquence ω.

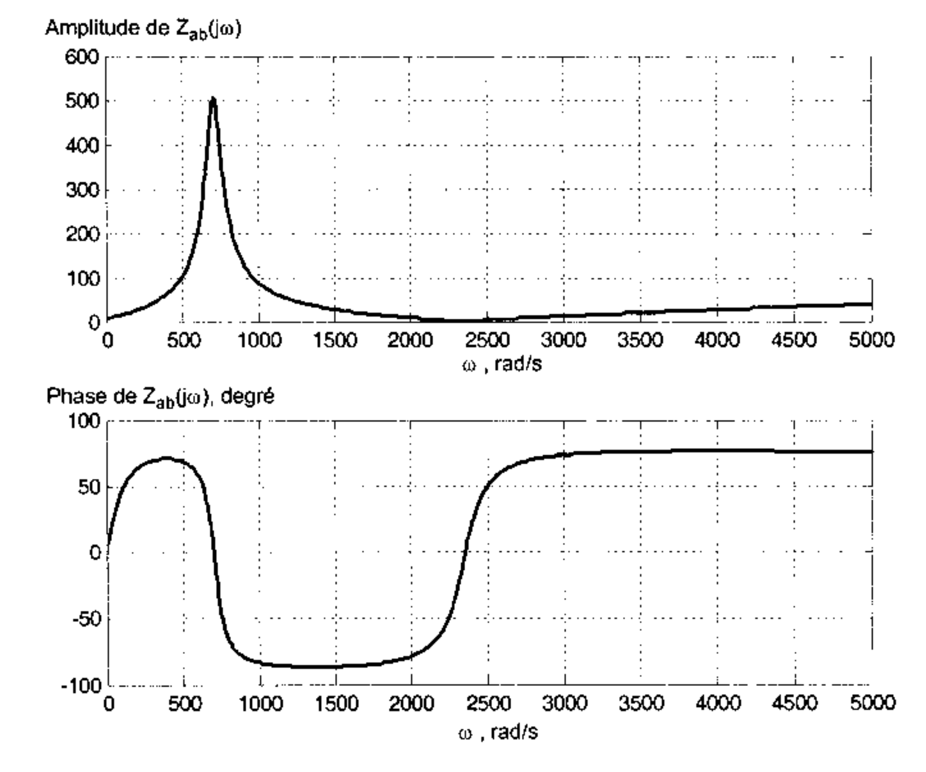


Figure 7-37 L'impédance Z_{ab} du circuit de la figure 7-35 en fonction de la fréquence.

La fonction de transfert $H_1(s) = \dfrac{V_2}{V_1}$ peut être calculée en appliquant la loi du diviseur de tension au circuit de la figure 7-36:

$$H_1(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(0.1s + 10) \parallel \left(\frac{0.5\times10^5}{s}\right)}{\frac{250\times0.01s}{250+0.01s} + \left\{(0.1s+10) \parallel \left(\frac{0.5\times10^5}{s}\right)\right\}}$$

$$H_1(s) = \frac{50s^2 + 1.255\times10^6 s + 1.25\times10^8}{0.25s^3 + 75s^2 + 1.38\times10^6 s + 1.25\times10^8}$$

En remplaçant s par jω dans cette expression, on obtient:

$$H_1(j\omega) = \frac{[1.25\times10^8 - 50\omega^2] + j[1.255\times10^6\omega]}{[1.25\times10^8 - 75\omega^2] + j[1.38\times10^6\omega - 0.25\omega^3]}$$

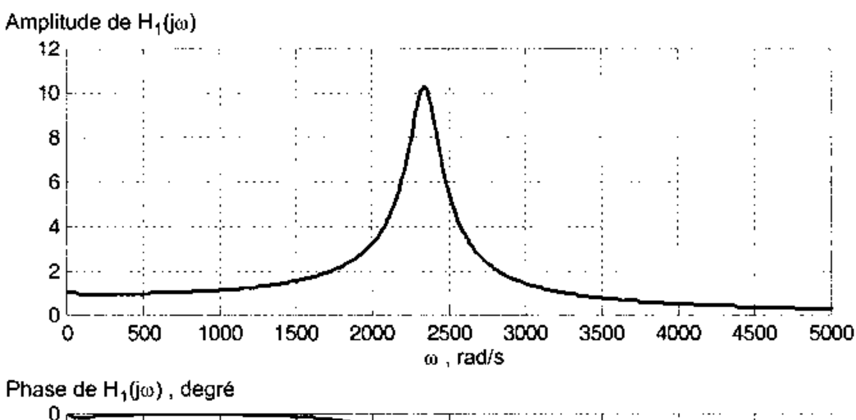
Le module de $H_1(j\omega)$ est égale à:

$$A_1(\omega) = |H_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1.25\times10^8 - 50\omega^2)^2 + (1.255\times10^6\omega)^2}}{\sqrt{(1.25\times10^8 - 75\omega^2)^2 + (1.38\times10^6\omega - 0.25\omega^3)^2}}$$

La phase de $H_1(j\omega)$ est égale à:

$$\phi_1(\omega) = \angle H_1(j\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{1.255\times10^6\omega}{1.25\times10^8 - 50\omega^2}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1.38\times10^6\omega - 0.25\omega^3}{1.25\times10^8 - 75\omega^2}\right)$$

La figure 7-38 montre l'amplitude et la phase de la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ en fonction de la fréquence ω.



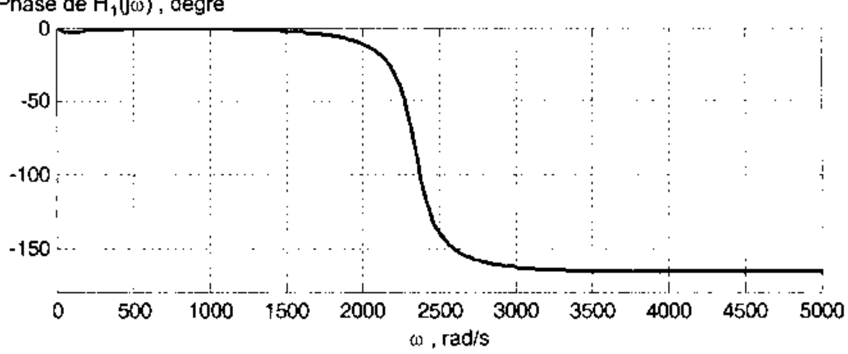


Figure 7-38 Réponse en fréquence du circuit de la figure 7-35.

7.3.8 Réponse en fréquence d'un circuit actif

Les circuits actifs sont en général des circuits qui contiennent des AMPLI OP et des éléments R et C. Ces circuits sont utilisés habituellement comme filtres dans les circuits électroniques analogiques.

La réponse en fréquence d'un tel circuit est obtenue de la même façon que les circuits passifs. L'exemple 7-6 présente la réponse en fréquence d'un filtre passe-bande actif du deuxième ordre.

Exemple 7-6 Filtre actif du deuxième ordre

Considérons le circuit actif montré dans la figure 7-39.

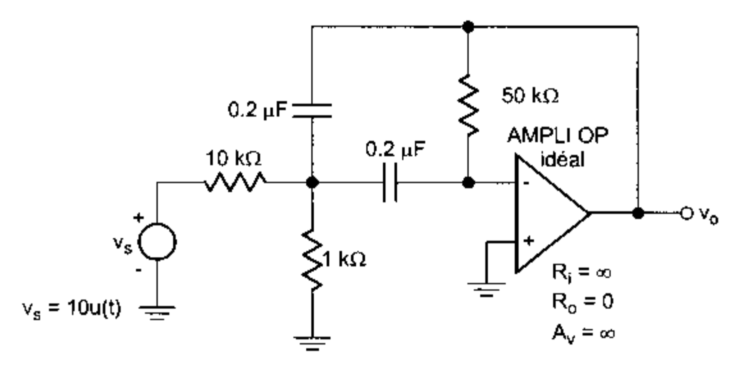


Figure 7-39 Circuit actif du deuxième ordre.

On désire déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \dfrac{V_o}{V_s}$.

Le circuit transformé dans le domaine de s est montré dans la figure 7-40.

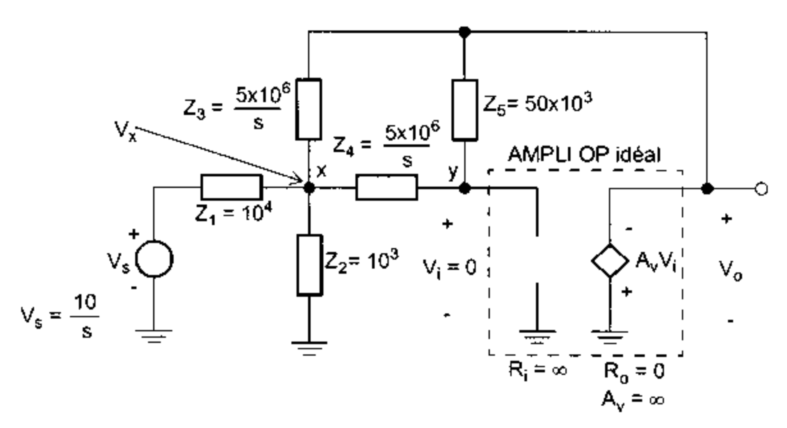


Figure 7-40 Circuit transformé dans le domaine de s.

La tension V_i est égale à 0 car le gain en tension de l'amplificateur opérationnel est infini. Le point y est au même potentiel que la masse.

On choisit V_X comme la tension nodale du circuit. On établit l'équations d'équilibre en utilisant la méthode des noeuds:

$$\left[\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right]V_x = \frac{V_s}{Z_1}+\frac{V_o}{Z_3} \qquad (7\text{-}27)$$

En appliquant la loi des courants au noeud y, on obtient:

$$\frac{V_x}{Z_4} = \frac{-V_o}{Z_5}.$$

Ou encore:

$$V_x = -\frac{Z_4}{Z_5}\times V_o.$$

L'équation (7-27) devient:

$$\left[\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right]\left[-\frac{Z_4}{Z_5}\times V_o\right] = \frac{V_s}{Z_1}+\frac{V_o}{Z_3}$$

Ou bien:

$$-\left\{\frac{1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)\right\}V_o = \frac{V_s}{Z_1}$$

On déduit:

$$H_1(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\frac{1}{Z_1}}{\left\{\frac{1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)\right\}} = \frac{-1}{\frac{Z_1}{Z_3}+\frac{Z_4}{Z_5}+\frac{Z_1Z_4}{Z_2Z_5}+\frac{Z_1Z_4}{Z_3Z_5}+\frac{Z_1}{Z_5}}$$

Avec les valeurs numériques, on a:

$$H_1(s) = \frac{-500s}{s^2+200s+550000}$$

En remplaçant s par $j\omega$ dans cette expression, on obtient:

$$H_1(j\omega) = \frac{-j500\omega}{(550000-\omega^2)+j200\omega}$$

Le module de $H_1(j\omega)$ est égale à:

$$A_1(\omega) = |H_1(j\omega)| = \frac{500\omega}{\sqrt{(550000-\omega^2)^2+(200\omega)^2}}$$

La phase de $H_1(j\omega)$ est égale à:

$$\phi_1(\omega) = \angle H_1(j\omega) = -\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}\left(\frac{200\omega}{550000-\omega^2}\right)$$

La figure 7-41 montre l'amplitude et la phase de la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ en fonction de la fréquence ω.

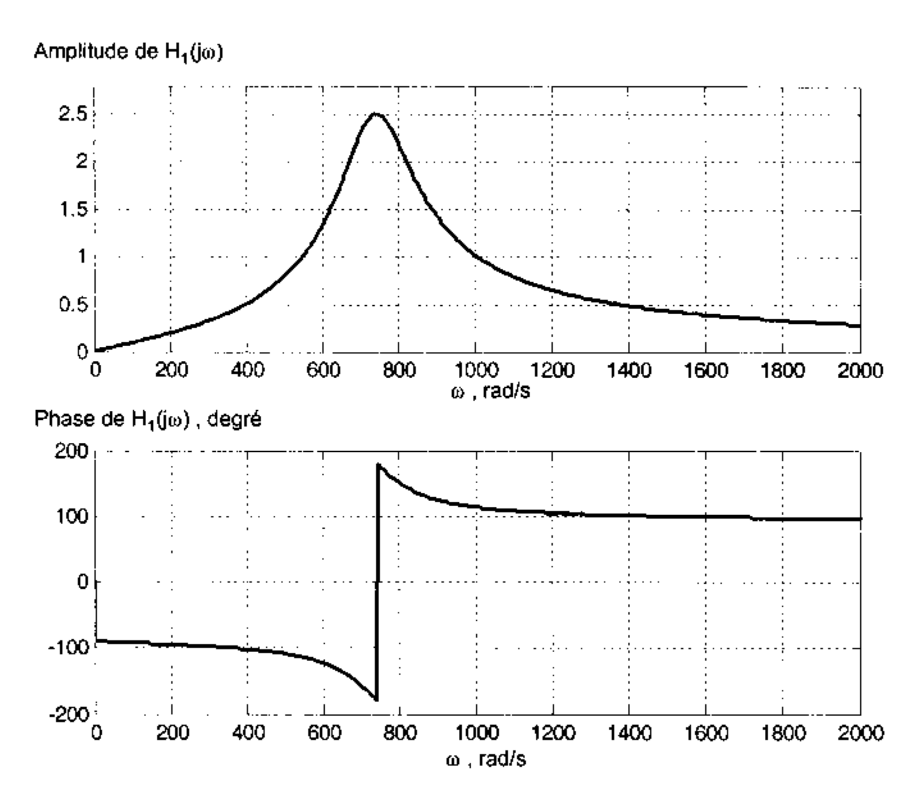


Figure 7-41 Réponse en fréquence du filtre actif de la figure 7-39.

7.3.9 Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode sont deux graphiques tracés en *échelle logarithmique* qui représentent la réponse en fréquence d'un circuit.

Pour une fonction de réseau **H**(jω), on trace:

- Réponse en amplitude: Graphique représentant 20logA(ω) en fonction de log(ω). L'unité utilisée pour 20logA(ω) est *décibel* (dB).
- Réponse en phase: Graphique représentant $\phi(\omega)$ en fonction de log(ω). L'unité utilisée pour $\phi(\omega)$ est *degré* ou *radian*.

On utilise habituellement des *graphiques semi-logarithmiques* (abcisses en échelle logarithmique et ordonnée en échelle linéaire) pour représenter la réponse en amplitude et la réponse en phase.

L'avantage principal des diagrammes de Bode (par rapport aux diagrammes en échelles linéaires) réside dans le fait que la réponse en fréquence d'*un produit* de fonctions de transfert est convertie en *une somme* de réponses en fréquence individuelles. Par conséquent, la réponse en fréquence globale peut être obtenue en additionnant les réponses en fréquence individuelles.

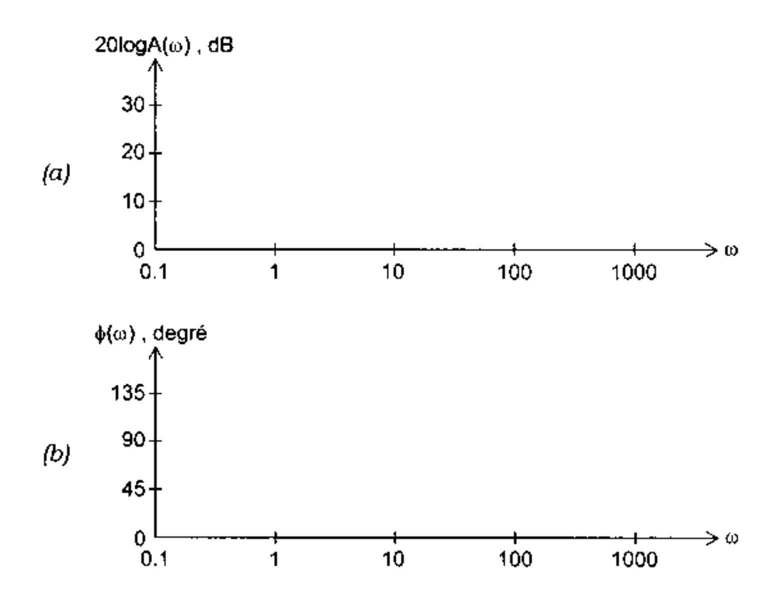


Figure 7-42 Les échelles d'un diagramme de Bode représentant la réponse en fréquence d'un circuit. (a) Réponse en amplitude. (b) Réponse en phase.

Considérons par exemple la fonction de transfert suivante:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{H}_1(j\omega) \times \mathbf{H}_2(j\omega) \times \mathbf{H}_3(j\omega) \tag{7-28}$$

L'amplitude de $\mathbf{H}(j\omega)$ est:

$$A(\omega) = A_1(\omega) \times A_2(\omega) \times A_3(\omega) \tag{7-29}$$

En convertissant $A(\omega)$ en dB, on a:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log[A(\omega)] = 20\log[A_1(\omega) \times A_2(\omega) \times A_3(\omega)]$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\{\log[A_1(\omega)] + \log[A_1(\omega)] + \log[A_1(\omega)]\}$$

$$A_{dB}(\omega) = A_{1dB}(\omega) + A_{2dB}(\omega) + A_{3dB}(\omega) \tag{7-30}$$

La phase de $\mathbf{H}(j\omega)$ est:

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega) \tag{7-31}$$

Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre

Considérons une fonction de transfert du premier ordre du type *passe-bas*:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)} \tag{7-32}$$

La réponse en amplitude est:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}\right] = -10\log[1 + (\omega/\omega_c)^2] \tag{7-33}$$

La réponse en phase est:

$$\phi(\omega) = -\mathrm{atan}[\omega/\omega_c] \tag{7-34}$$

Lorsque $\omega = \omega_c$, on a:

$A_{dB}(\omega_c) = -3\text{dB}$ et $\phi(\omega_c) = -45°$.

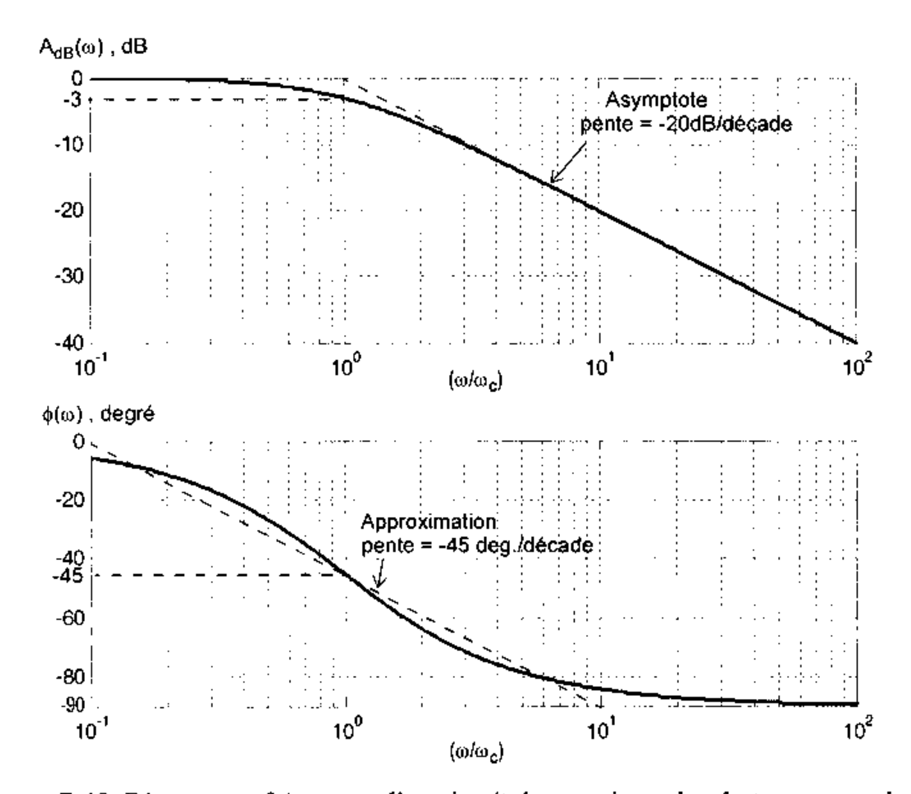


Figure 7-43 Réponse en fréquence d'un circuit du premier ordre du type passe-bas.

Remarques: a) Sur l'échelle de fréquence, une décade correspond à un intervalle de ω à 10ω. Une octave correspond à un intervalle de ω à 2ω.

b) Une pente de -20dB/décade est équivalente à -6dB/octave.

Considérons une fonction de transfert du premier ordre du type *passe-haut*:

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j(\omega/\omega_c) \tag{7-35}$$

La réponse en amplitude est:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log\left[\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}\right] = 10\log[1 + (\omega/\omega_c)^2] \tag{7-36}$$

La réponse en phase est:

$$\phi(\omega) = \text{arctg}[\omega/\omega_c] \tag{7-37}$$

Lorsque $\omega = \omega_c$, on a:

$A_{dB}(\omega_c) = 3\text{dB}$ et $\phi(\omega_c) = 45°$.

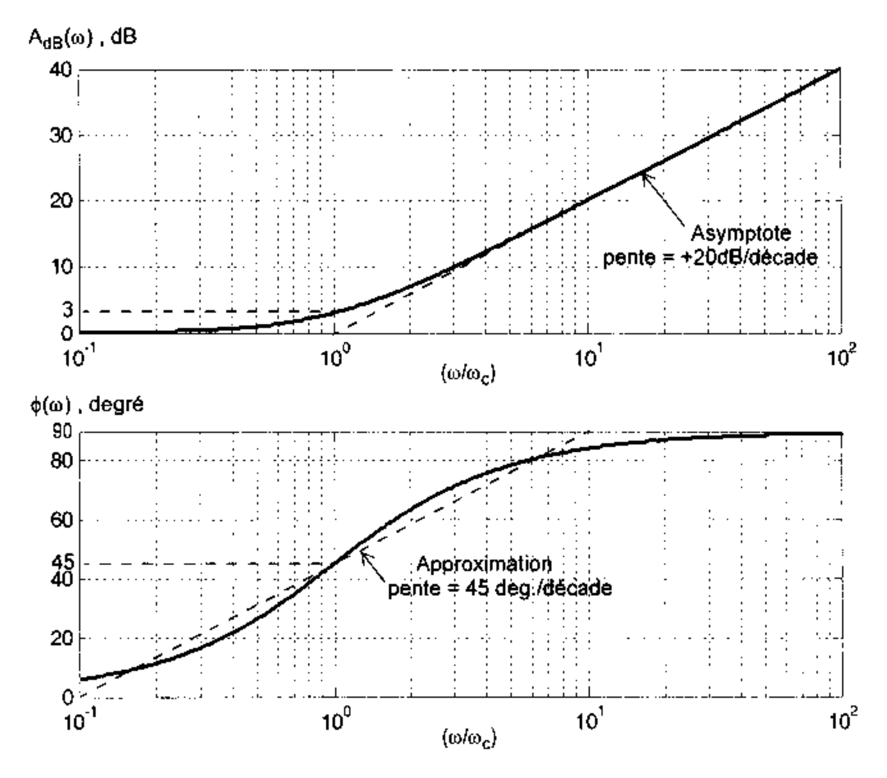


Figure 7-44 Réponse en fréquence d'un circuit du premier ordre du type passe-haut.

Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert du deuxième ordre

Considérons une fonction de transfert du deuxième ordre du type passe-bas:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1} \tag{7-38}$$

La réponse en amplitude est:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}\right] \tag{7-39}$$

$$A_{dB}(\omega) = -10\log[[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2] \tag{7-40}$$

La réponse en phase est:

$$\phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \tag{7-41}$$

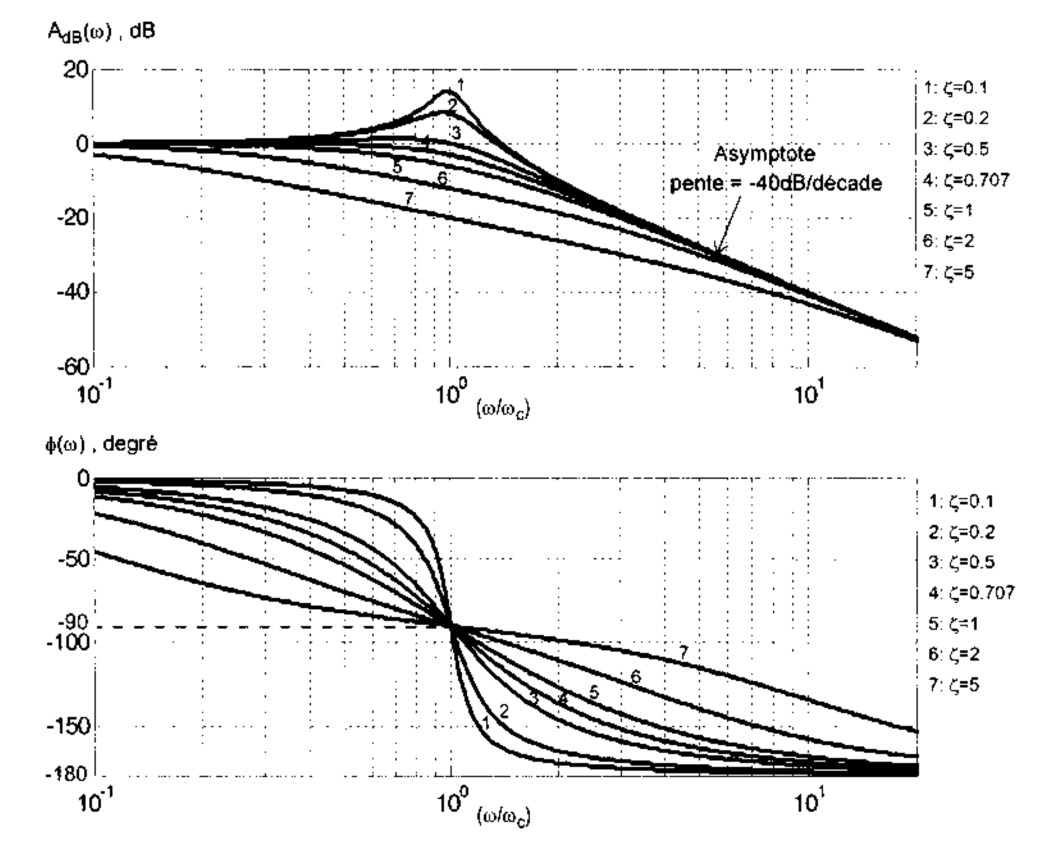


Figure 7-45 Réponse en fréquence d'un circuit du deuxième ordre du type passe-bas.

Considérons une fonction de transfert du deuxième ordre du type passe-haut:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1 \quad (7\text{-}42)$$

La réponse en amplitude est:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log\left[\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}\right] \quad (7\text{-}43)$$

$$A_{dB}(\omega) = 10\log[[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2] \quad (7\text{-}44)$$

La réponse en phase est:

$$\phi(\omega) = \mathrm{arctg}\left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \quad (7\text{-}45)$$

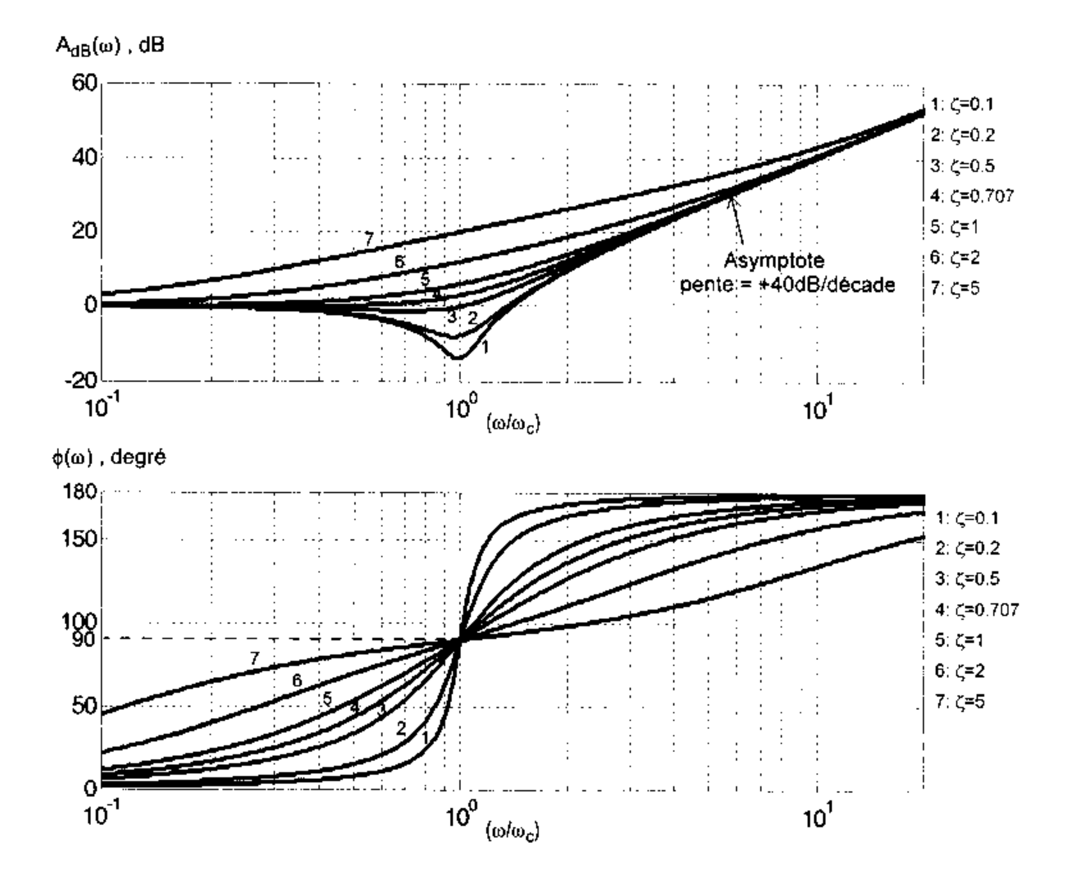


Figure 7-46 Réponse en fréquence d'un circuit du deuxième ordre du type passe-haut.

Diagrammes de Bode d'un produit de fonctions de transfert simples

Considérons la fonction de transfert H(s) suivante:

$$H(s) = \frac{6\times 10^8 s + 3\times 10^{10}}{(s+250)(s^2+800s+10^6)}$$

On peut exprimer cette fonction de transfert sous forme d'un produit de fonctions simples:

$$H(s) = 6\times 10^8 \times (s+50)\times \frac{1}{(s+250)}\times \frac{1}{s^2+1200s+10^6}$$

ou bien:

$$H(s) = 120\times\left[1+\frac{s}{50}\right]\times\left[\frac{1}{1+\frac{s}{250}}\right]\times\left[\frac{1}{1+1.2\times 10^{-3}s+\frac{s^2}{10^6}}\right]$$

En RSP, la fonction de transfert devient:

$$H(j\omega) = \underset{\mathbf{H_1}}{120}\times\underset{\mathbf{H_2}}{\left[1+\frac{j\omega}{50}\right]}\times\underset{\mathbf{H_3}}{\left[\frac{1}{1+\frac{j\omega}{250}}\right]}\times\underset{\mathbf{H_4}}{\left[\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{10^6}+1.2\times 10^{-3}j\omega}\right]}$$

On obtient ainsi un produit de quatre termes: $H(j\omega) = H_1\times H_2\times H_3\times H_4$

La réponse en fréquence $H(j\omega)$ peut être déterminée en considérant chacun des termes individuellement. Les diagrammes de Bode de $H(j\omega)$ seront obtenus en additionnant les diagrammes de Bode individuels. L'addition graphique des diagrammes de Bode peut être simplifiée en représentant chaque diagramme seulement par les asymptotes.

	Amplitude $A_{dB}(\omega)$	Phase $\phi(\omega)$
$H_1 = 120$	$20\log 120 = 41.58$ dB	0
$H_2 = 1+\frac{j\omega}{50}$	$10\log(1+4\times 10^{-4}\omega^2)$	$\mathrm{atan}(0.02\omega)$
$H_3 = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{250}}$	$-10\log(1+1.6\times 10^{-5}\omega^2)$	$-\mathrm{atan}(0.004\omega)$
$H_4 = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{10^6}+1.2\times 10^{-3}j\omega}$	$-10\log[(1-10^{-6}\omega^2)^2+(1.2\times 10^{-3}\omega)^2]$	$-\mathrm{atan}\left[\frac{1.2\times 10^{-3}\omega}{1-10^{-6}\omega^2}\right]$

Tableau 7-3 Réponse en fréquence des quatre fonctions de transfert simples.

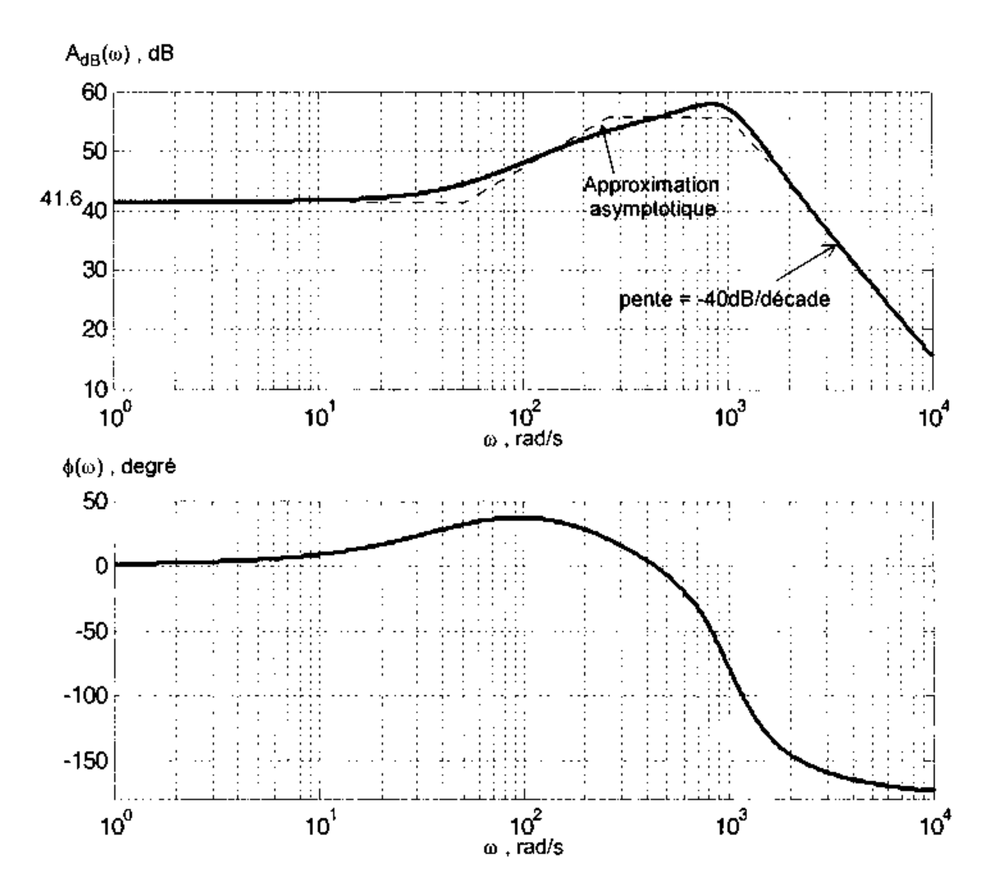


Figure 7-47 Réponse en fréquence de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{6 \times 10^8 s + 3 \times 10^{10}}{(s + 250)(s^2 + 800s + 10^6)}$$

7.4 Puissance en régime sinusoïdal permanent

Considérons un dipôle D en régime sinusoïdal permanent. La tension et le courant du dipôle peuvent être exprimés sous la forme générale:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$$

Le phaseur représentant la tension v(t) est $\mathbf{V} = V_m \angle\alpha$.

Le phaseur représentant le courant i(t) est $\mathbf{I} = I_m \angle\beta$.

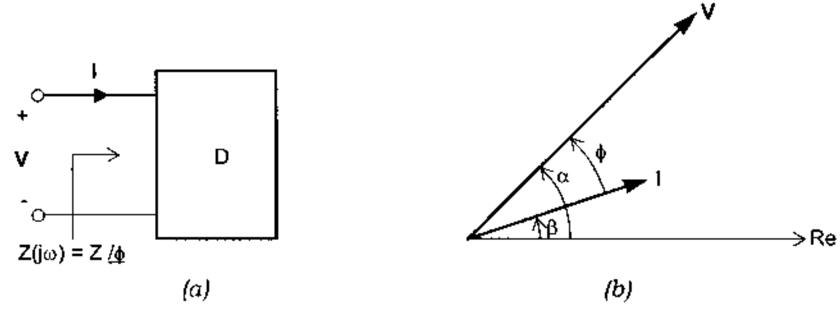


Figure 7-48 Un dipôle en RSP.
(a) Impédance. (b) Diagramme vectoriel.

7.4.1 Puissance instantanée

La puissance instantanée fournie au dipôle D est égale au produit de la tension v(t) et du courant i(t):

$$p(t) = v(t) \times i(t) \tag{7-46}$$

On a:

$$p(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) \times I_m \cos(\omega t + \beta) \tag{7-47}$$

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta) \tag{7-48}$$

On peut exprimer p(t) sous la forme suivante:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\cos\phi + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta) \tag{7-49}$$

où $\phi = (\alpha - \beta)$ est le déphasage de i(t) par rapport à v(t).

Remarque: ϕ est aussi l'angle de l'impédance $\mathbf{Z}(j\omega)$.

On constate qu'avec la convention de signe de la figure 7-48:

- Lorsque $p(t) > 0$: le dipôle absorbe de l'énergie,
- Lorsque $p(t) < 0$: le dipôle fournit de l'énergie.

La puissance instantanée p(t) en régime sinusoïdal permanent, exprimée dans l'équation (7-49), est égale à la somme de deux termes:

- $\frac{V_m I_m}{2}\cos\phi$ qui est une constante,
- $\frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$ qui est une fonction sinusoïdale de pulsation 2ω.

Donc, la puissance transmise dans un circuit en RSP est ondulatoire avec une pulsation égale à deux fois la pulsation de la source et avec une valeur moyenne égale à $\frac{V_m I_m}{2}\cos\phi$.

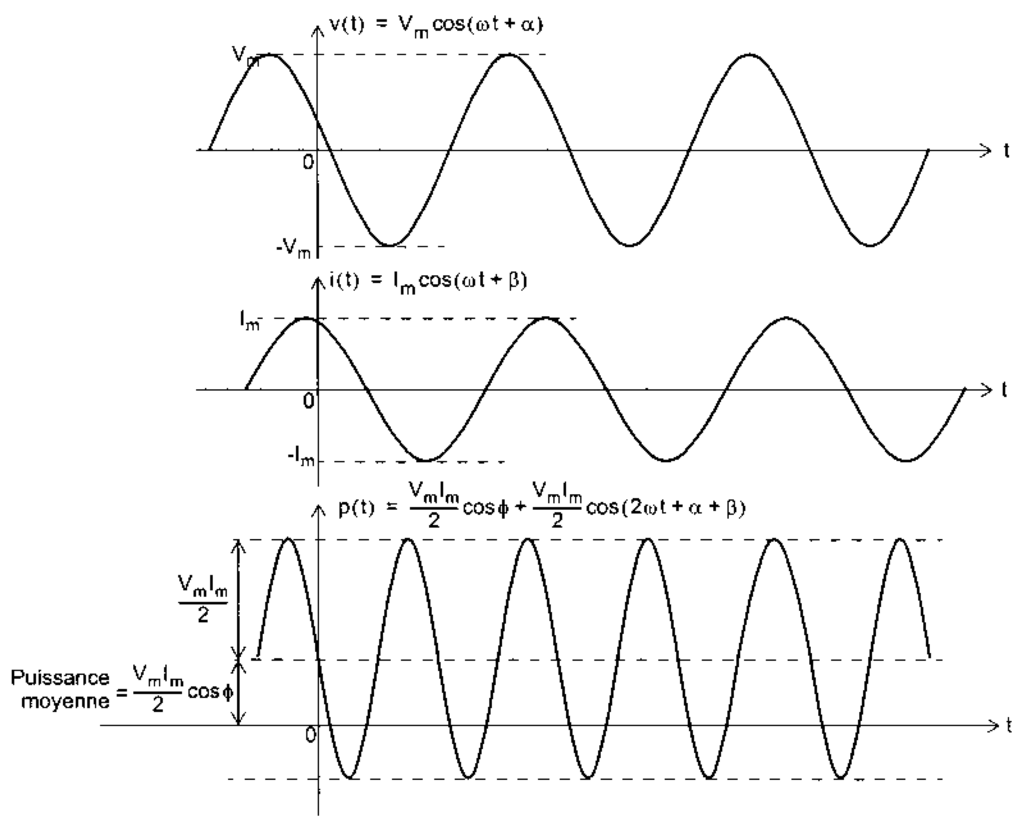


Figure 7-49 Puissance instantanée en régime sinusoïdal permanent.

7.4.2 Puissance moyenne

La puissance moyenne fournie au dipôle D est égale la valeur moyenne de la puissance instantanée:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} p(t)dt = \frac{V_m I_m}{2}\cos\phi \qquad (7\text{-}50)$$

À remarquer que:

- $P > 0$: le dipôle absorbe de l'énergie (en moyenne)
- $P < 0$: le dipôle fournit de l'énergie (en moyenne)

7.4.3 Valeur efficace d'une fonction périodique

La valeur efficace d'une tension périodique v(t) peut être définie comme «*la valeur d'une tension continue qui dissipera dans une résistance de 1 Ω la même puissance moyenne que v(t)*».

Calculons la puissance pour les deux cas.

a) Cas 1: la tension périodique v(t) est appliquée aux bornes d'une résistance de 1 Ω.

Puissance instantanée: $$p(t) = \frac{[v(t)]^2}{1} = [v(t)]^2 \ \text{W}$$

Puissance moyenne dissipée: $$P_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} p(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}[v(t)]^2 dt \ \text{W}$$

b) Cas 2: une tension continue V_{cc} est appliquée aux bornes d'une résistance de 1 Ω.

Puissance dissipée $$P_{cc} = \frac{(V_{cc})^2}{1} = (V_{cc})^2 \ \text{W}$$

Si les puissances dissipées dans les deux cas sont égales, alors:

$$(V_{cc})^2 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}[v(t)]^2 dt$$

Ou bien:

$$V_{cc} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0}[v(t)]^2 dt}$$

Cette relation est précisément la définition de la valeur efficace de la tension périodique v(t):

$$V_{eff} = V_{cc} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0}[v(t)]^2 dt}$$

De façon générale, la valeur efficace d'une fonction périodique f(t) de période T_0 (fréquence $f_0 = 1/T_0$) est calculée par la relation suivante:

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f^2(t)dt} \qquad (7\text{-}51)$$

La valeur efficace d'une fonction sinusoïdale $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$ est égale à:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0}(V_m\cos(\omega t + \phi))^2 dt} \qquad (7\text{-}52)$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T_0}\int_{T_0}\left[\frac{1 + \cos 2(\omega t + \phi)}{2}\right]dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m \qquad (7\text{-}53)$$

On peut démontrer que la valeur efficace d'une fonction périodique est donnée par:

$$F_{eff} = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \ldots} \qquad (7\text{-}54)$$

où F_0 = composante continue = valeur moyenne
F_1 = valeur efficace de la fondamentale
F_2 = valeur efficace de la 2e harmonique
. . .
F_n = valeur efficace de la nième harmonique

Exemple 7-7 Valeur efficace d'une tension périodique
Considérons une tension périodique qui est égale à la somme d'une composante continue de 300 V et d'une sinusoïde d'amplitude 150 V et de fréquence 60 Hz:

$$v(t) = 300 + 150\cos(120\pi t).$$

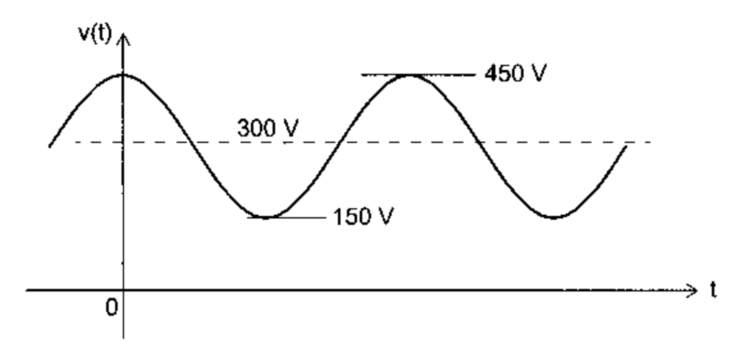


Figure 7-50 Une tension périodique de fréquence 60 Hz.

La valeur efficace de v(t) est égale à:

$$V_{eff} = \sqrt{300^2 + \left(\frac{150}{\sqrt{2}}\right)^2} = 318.2 \text{ V}.$$

Exemple 7-8 Valeur efficace d'une tension périodique
Considérons la tension périodique suivante qui est la somme de trois fonctions sinusoïdales de fréquence 60 Hz, 180 Hz et 300 Hz:

$$v(t) = 120\sqrt{2}\cos(120\pi t) + 50\sqrt{2}\cos(360\pi t - 0.95) + 18\sqrt{2}\cos(600\pi t + 0.25).$$

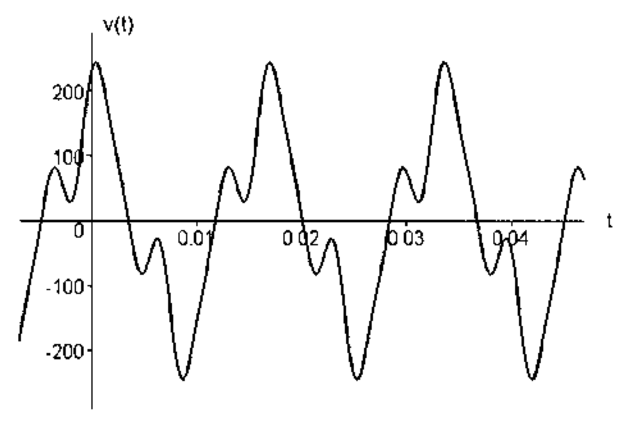


Figure 7-51 Une tension périodique de fréquence 60 Hz.

Valeur efficace de la fondamentale: $V_1 = 120$ V.

Valeur efficace de la 3e harmonique: $V_3 = 50$ V

Valeur efficace de la 5e harmonique: $V_5 = 18$ V

La valeur efficace de v(t) est égale à:

$$V_{eff} = \sqrt{V_1{}^2 + V_3{}^2 + V_5{}^2} = \sqrt{120^2 + 50^2 + 18^2} = 131.24 \text{ V.}$$

Exemple 7-9 Valeur efficace d'une tension périodique

Considérons la tension v(t) montrée dans la figure 7-52.

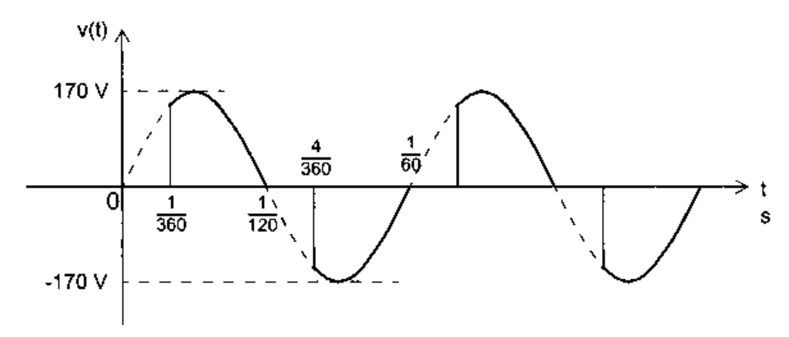


Figure 7-52 Une tension périodique de fréquence 60 Hz.

Cette tension sinusoïdale «tranchée» est la tension de sortie d'un gradateur à thyristors qui sert à faire varier la tension efficace d'une source de tension monophasée.

La valeur efficace de cette tension dépend de l'angle d'amorçage des thyristors. Dans le cas montré, l'angle d'amorçage est égal à 60°.

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{(1/60)}\left[\int_{1/360}^{1/120}(170\sin\omega t)^2 dt + \int_{4/360}^{1/60}(170\sin\omega t)^2 dt\right]}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{2}{(1/60)}\left[\int_{1/360}^{1/120}(170\sin\omega t)^2 dt\right]} = \sqrt{60 \times 170^2 \int_{1/360}^{1/120}(1 - 2\cos 2\omega t)dt}$$

$$V_{eff} = \sqrt{60 \times 170^2\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]\Bigg|_{1/360}^{1/120}} = 104.73 \text{ V.}$$

Exemple 7-10 Valeur efficace d'un courant périodique

Considérons le courant i(t) montré dans la figure 7-53.

La valeur efficace du courant i(t) est égale à:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4\times 10^{-3}}\left[\int_0^{2\times 10^{-3}} 15^2 dt + \int_{2\times 10^{-3}}^{4\times 10^{-3}} (-5)^2 dt\right]}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{4\times10^{-3}}[(15^2\times2\times10^{-3})+((-5)^2\times2\times10^{-3})]} = 11.18\,A$$

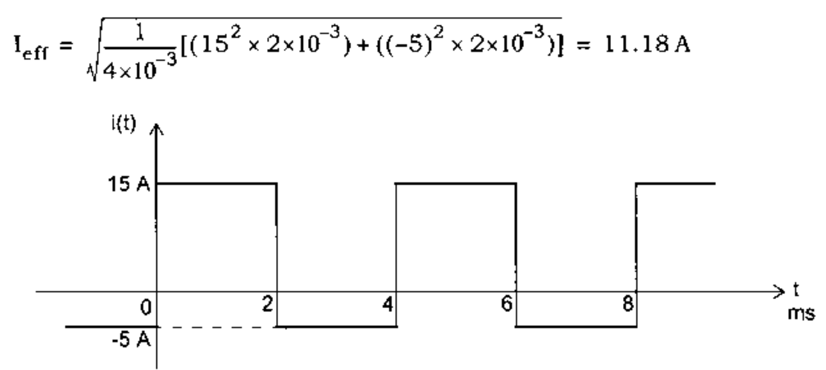


Figure 7-53 Un courant périodique de fréquence 250 Hz.

7.4.4 Puissance complexe

Pour faciliter la représentation de la puissance en régime sinusoïdal permanent, on définit une quantité **S** appelée puissance complexe qui peut être calculée à partir des phaseurs de tension et de courant.

On peut exprimer la tension v(t) et le courant (t) sous la forme suivante:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t+\alpha) = \tfrac{1}{2}[V_m e^{j\alpha}e^{j\omega t} + V_m e^{-j\alpha}e^{-j\omega t}] \quad (7\text{-}55)$$

$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\beta) = \tfrac{1}{2}[I_m e^{j\beta}e^{j\omega t} + I_m e^{-j\beta}e^{-j\omega t}] \quad (7\text{-}56)$$

où V_m et I_m sont les valeurs crêtes (ou amplitudes) de v(t) et i(t) respectivement.

La puissance instantanée p(t) = v(t)i(t) sera donnée par:

$$p(t) = \tfrac{1}{2}[V_m e^{j\alpha}e^{j\omega t} + V_m e^{-j\alpha}e^{-j\omega t}]\times\tfrac{1}{2}[I_m e^{j\beta}e^{j\omega t} + I_m e^{-j\beta}e^{-j\omega t}] \quad (7\text{-}57)$$

$$p(t) = \tfrac{1}{4}[V_m e^{j\alpha}I_m e^{-j\beta} + V_m e^{-j\alpha}I_m e^{j\beta}] + \tfrac{1}{4}[V_m e^{j\alpha}I_m e^{j\beta}e^{j2\omega t} + V_m e^{-j\alpha}I_m e^{-j\beta}e^{-j2\omega t}] \quad (7\text{-}58)$$

À noter que $V_m e^{j\alpha}$ et $I_m e^{j\beta}$ sont les phaseurs **V** et **I** qui représentent la tension v(t) et le courant i(t).

On peut écrire alors:

$$p(t) = \tfrac{1}{4}[\mathbf{VI^*} + \mathbf{V^*I}] + \tfrac{1}{4}[\mathbf{VI}e^{j2\omega t} + \mathbf{V^*I^*}e^{-j2\omega t}] \quad (7\text{-}59)$$

où $\mathbf{V} = V_m e^{j\alpha}$ et $\mathbf{I} = I_m e^{j\beta}$.

Ou encore:

$$p(t) = \mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{2}\mathbf{VI^*}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{2}\mathbf{V}e^{j\omega t}\mathbf{I}e^{j\omega t}\right\} \quad (7\text{-}60)$$

La quantité $\frac{1}{2}\mathbf{VI^*}$ est définie comme la *puissance complexe* **S**:

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\mathbf{VI^*} = \tfrac{1}{2}V_m I_m e^{j(\alpha-\beta)} = \tfrac{1}{2}V_m I_m e^{j\phi} = (\tfrac{1}{2}V_m I_m \cos\phi) + j(\tfrac{1}{2}V_m I_m \sin\phi) \qquad (7\text{-}61)$$

où $\phi = (\alpha\text{-}\beta)$ est le *déphasage du courant i(t) par rapport à la tension v(t).*

On peut exprimer la puissance complexe **S** en fonction des valeurs efficaces de la tension et du courant:

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\mathbf{VI^*} = \tfrac{1}{2}(V_m e^{j\alpha})(I_m e^{j\beta})^* = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}e^{j\alpha}\right)\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\beta}\right)^* = (V_{eff}e^{j\alpha})(I_{eff}e^{j\beta})^* \qquad (7\text{-}62)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* \qquad (7\text{-}63)$$

Dans cette relation, $\mathbf{V}_{eff} = V_{eff}e^{j\alpha}$ et $\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}e^{j\beta}$ sont respectivement le phaseur de tension efficace et le phaseur de courant efficace.

Alors, on peut écrire également:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = V_{eff}I_{eff}e^{j(\alpha-\beta)} = V_{eff}I_{eff}e^{j\phi} = (V_{eff}I_{eff}\cos\phi) + j(V_{eff}I_{eff}\sin\phi) \qquad (7\text{-}64)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = (V_{eff}I_{eff}\cos\phi) + j(V_{eff}I_{eff}\sin\phi) \qquad (7\text{-}65)$$

Le module de **S** est définie comme la <u>puissance apparente</u>:

$$S = |\mathbf{S}| = \left|V_{eff}I_{eff}e^{j\phi}\right| = V_{eff}I_{eff} \text{ (en VA)} \qquad (7\text{-}66)$$

La partie réelle de **S** est définie comme la <u>puissance active</u>:

$$P = \mathrm{Re}\{\mathbf{S}\} = V_{eff}I_{eff}\cos\phi \text{ (en W)} \qquad (7\text{-}67)$$

La partie imaginaire de **S** est définie comme la <u>puissance réactive</u>:

$$Q = \mathrm{Im}\{\mathbf{S}\} = V_{eff}I_{eff}\sin\phi \text{ (en VAR)} \qquad (7\text{-}68)$$

Nous utilisons un *diagramme des puissances* dans le plan complexe, comme montré dans la figure 7-54, pour représenter les relations entre les puissance complexe, active et réactive.

Nous constatons que:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \qquad (7\text{-}69)$$

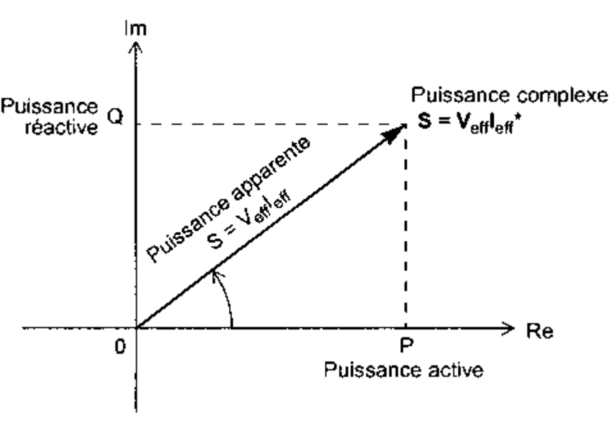


Figure 7-54 Diagramme des puissances

Puissance complexe dans un dipôle

Considérons un dipôle D dont l'impédance est $\mathbf{Z} = R + jX$. Nous avons:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX = Ze^{j\phi} \qquad (7\text{-}70)$$

où $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right)$.

La puissance complexe dans ce dipôle est donnée par:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \mathbf{Z}\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = (R + jX)I_{eff}^2 = RI_{eff}^2 + jXI_{eff}^2 \qquad (7\text{-}71)$$

On constate que:

- la puissance active $P = RI_{eff}^2$ est dissipée entièrement dans la partie réelle R de $\mathbf{Z}$,

- la puissance réactive $Q = XI_{eff}^2$ réside entièrement dans la partie imaginaire X de $\mathbf{Z}$.

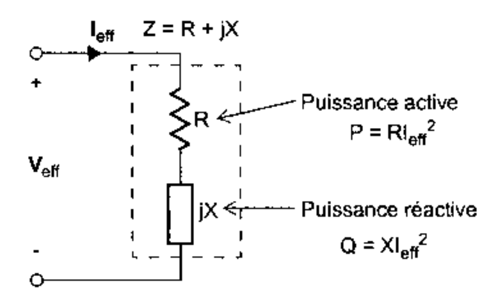


Figure 7-55 Puissance active et puissance réactive dans une impédance Z.

On peut écrire aussi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \mathbf{V}_{eff}\left(\frac{\mathbf{V}_{eff}}{\mathbf{Z}}\right)^* = \mathbf{V}_{eff}\left(\frac{\mathbf{V}_{eff}^*}{\mathbf{Z}^*}\right) = \frac{V_{eff}^2}{R - jX} \qquad (7\text{-}72)$$

7.4.5 Facteur de puissance

Le *facteur de puissance* d'un dipôle (système électrique à deux bornes) est défini comme le rapport de la puissance active et la puissance apparente:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{V_{eff}I_{eff}\cos\phi}{V_{eff}I_{eff}} = \cos\phi \qquad (7\text{-}73)$$

Alors, le facteur de puissance d'un système électrique en RSP est égal à $\cos\phi$, où ϕ est le déphasage du courant i(t) par rapport à la tension v(t).

Exemple 7-11 Calcul de puissance

Un équipement électrique est connecté à une source de tension sinusoïdale de valeur efficace 120V et de fréquence 60 Hz. On mesure un courant efficace de 15 A avec un déphasage de 27 ° arrière (le phaseur courant est en arrière du phaseur tension d'un angle de 27° ou bien le courant est en retard de 27 ° par rapport à la tension).

Nous avons:

$$\mathbf{V}_{eff} = 120\underline{/0^\circ}\text{ V et } \mathbf{I}_{eff} = 15\underline{/-27^\circ}\text{ A}$$

Le déphasage du courant par rapport à la tension est:

$\phi = \underline{/\mathbf{V}_{eff}} - \underline{/\mathbf{I}_{eff}} = 0° - (-27°) = 27°$

La puissance apparente est égale à:

$S = V_{eff}I_{eff} = 120 \times 15 = 1800$ VA

La puissance active est:

$P = V_{eff}I_{eff} \cos(27°) = 1603.8$ W

La puissance réactive est:

$Q = V_{eff}I_{eff} \sin(27°) = 817.2$ VAR

Le facteur de puissance de cet équipement est égal à:

$fp = \cos(27°) = 0.891$

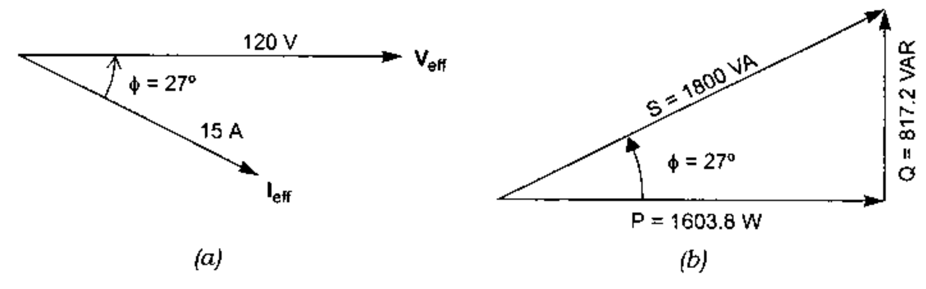


Figure 7-56 Diagrammes vectoriels.
(a) Tension et courant. (b) Puissances.

7.4.6 Puissance dans des charges typiques

Charge résistive (R)

Dans une charge résistive, le courant est en phase avec la tension:

$$\mathbf{I}_{eff} = \frac{\mathbf{V}_{eff}}{R}$$

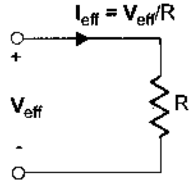


Figure 7-57 Relation entre la tension et le courant dans une résistance.

La puissance complexe dans R est égale à:

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \frac{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{V}_{eff}^*}{R} = R\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \frac{V_{eff}^2}{R} = RI_{eff}^2 \qquad (7\text{-}74)$$

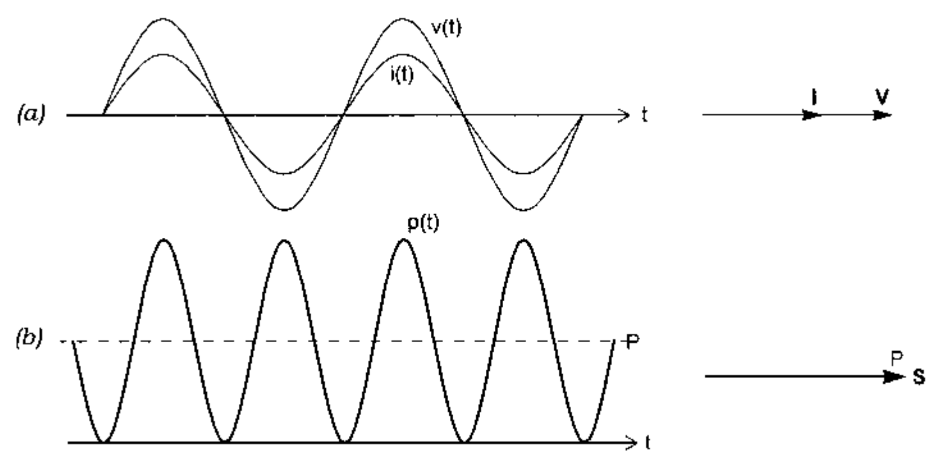


Figure 7-58 Puissances dans une charge résistive. (a) Tension et courant. (b) Puissance.

Charge purement inductive (L)

Dans une charge purement inductive, le courant est en retard de 90° par rapport à la tension:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = -j\frac{\mathbf{V}}{\omega L}$$

Figure 7-59 Relation entre la tension et le courant dans une inductance.

La puissance complexe dans L est égale à:

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \frac{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{V}_{eff}^*}{-j\omega L} = j\omega L\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = j\omega L I_{eff}^2 = j\frac{V_{eff}^2}{\omega L} \qquad (7\text{-}75)$$

On constate qu'une charge purement inductive consomme seulement de la puissance réactive. Le facteur de puissance d'une charge purement inductive est égal à 0.

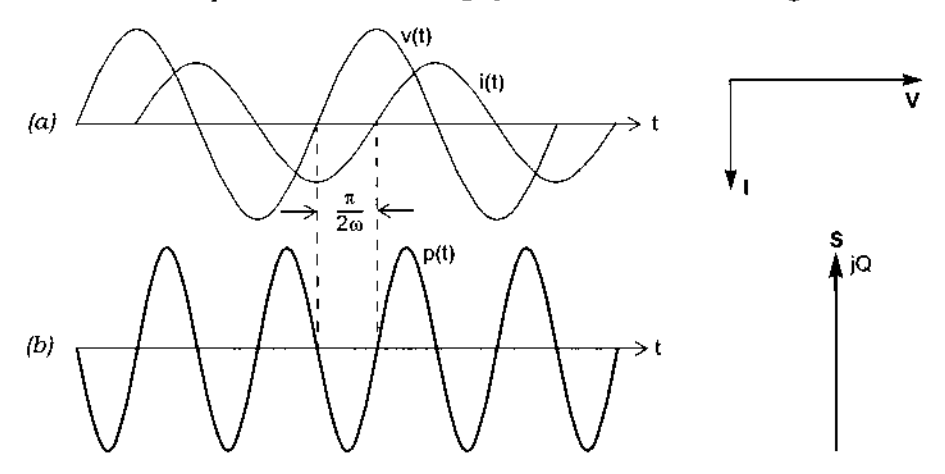


Figure 7-60 Puissances dans une charge purement inductive. (a) Tension et courant. (b) Puissance.

Charge inductive (RL)

Dans une charge inductive (RL), le courant est en retard de phase par rapport à la tension:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \times e^{-j\phi}$$

avec $\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$.

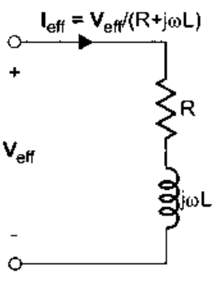


Figure 7-61 Relation entre la tension et le courant dans une charge inductive (RL).

La puissance complexe dans la charge RL est égale à:

$$\mathbf{S}_{RL} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \frac{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{V}_{eff}^*}{R - j\omega L} = (R + j\omega L)\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = (R + j\omega L)I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R - j\omega L} \qquad (7\text{-}76)$$

On constate que:

- la puissance active est consommée uniquement dans R,
- la puissance réactive est consommée uniquement dans L.

Le facteur de puissance d'une charge inductive est:

fp = cosϕ (arrière)

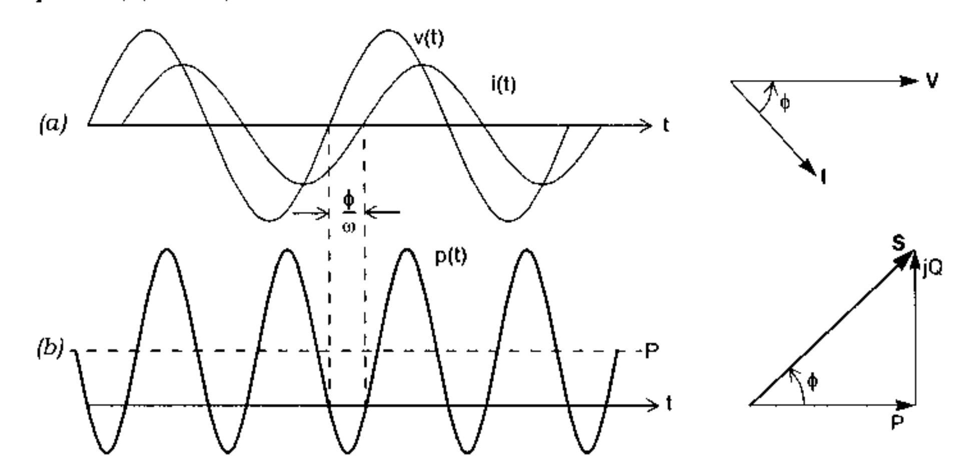


Figure 7-62 Puissances dans une charge inductive (RL). (a) Tension et courant. (b) Puissance.

Charge purement capacitive (C)

Dans une charge purement capacitive, le courant est en avance de 90° par rapport à la tension:

$$\mathbf{I}_{eff} = j\omega C\mathbf{V}_{eff}$$

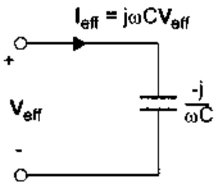


Figure 7-63 Relation entre la tension et le courant dans une charge purement capacitive.

La puissance complexe dans C est égale à:

$$\mathbf{S}_C = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}{}^* = -j\omega C\mathbf{V}_{eff}\mathbf{V}_{eff}{}^* = \frac{\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}{}^*}{j\omega C} = -j\frac{I_{eff}{}^2}{\omega C} = -j\omega CV_{eff}{}^2 \qquad (7\text{-}77)$$

On constate qu'une charge purement capacitive fournit seulement de la puissance réactive.

Le facteur de puissance d'une charge purement capacitive est égal à 0.

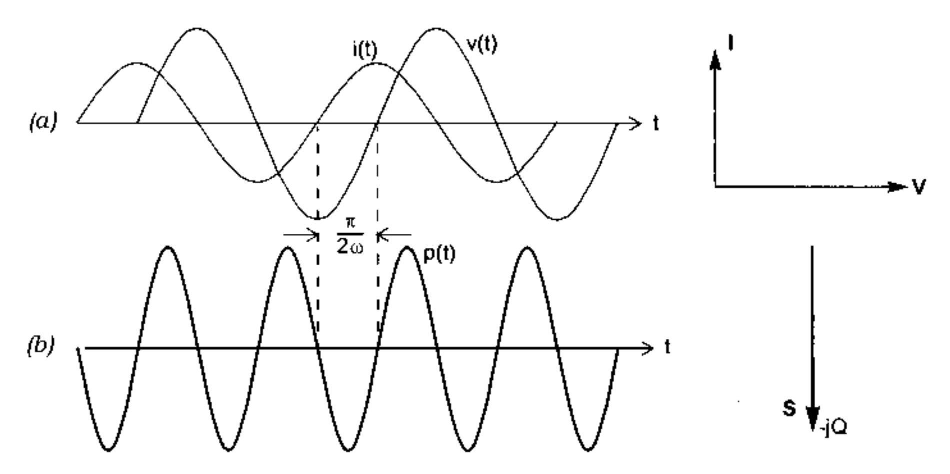


Figure 7-64 Puissance dans une charge purement capacitive.
(a) Tension et courant. (b) Puissance.

Charge capacitive (RC)

Dans une charge capacitive, le courant est en avance de phase par rapport à la tension:

$$\mathbf{I}_{eff} = \frac{\mathbf{V}_{eff}}{R - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \times e^{j\phi}$$

avec $\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right)$.

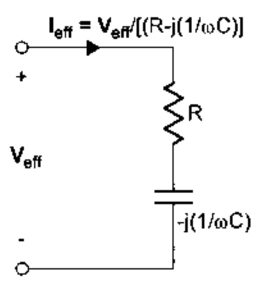


Figure 7-65 Relation entre la tension et le courant dans une charge capacitive (RC).

La puissance complexe dans la charge RC est égale à:

$$\mathbf{S}_{RC} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \frac{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{V}_{eff}^*}{R + j\frac{1}{C\omega}} = \left(R - j\frac{1}{C\omega}\right)\mathbf{I}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^* = \left(R - j\frac{1}{C\omega}\right)I_{eff}^{\ 2} = \frac{V_{eff}^{\ 2}}{R + j\frac{1}{C\omega}} \quad (7\text{-}78)$$

On constate que:

- la puissance active est consommée uniquement dans R,
- la puissance réactive est fournie uniquement par C.

Le facteur de puissance d'une charge capacitive est:

fp = $\cos\phi$ (avant).

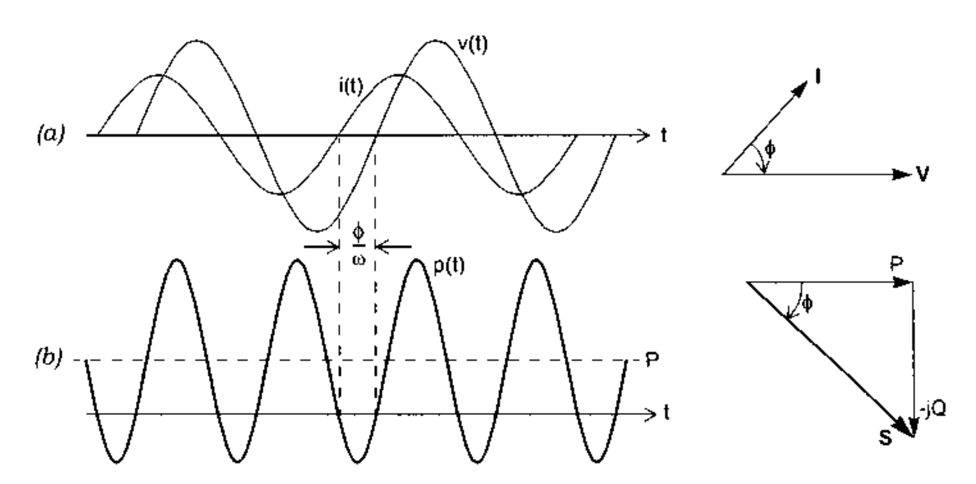


Figure 7-66 Puissances dans une charge capacitive (RC). (a) Tension et courant. (b) Puissance.

Exemple 7-12 Calcul de puissance dans une charge RLC

Le circuit montré dans la figure 7-67 est en régime sinusoïdal permanent.

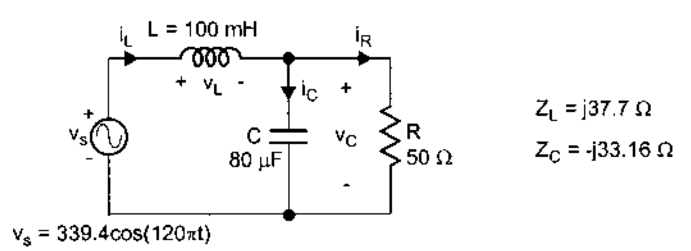


Figure 7-67 Calcul de puissance dans une charge RLC.

On calcule les courants et les tensions du circuit:

$$I_{L(eff)} = \frac{V_{s(eff)}}{Z_L + \frac{RZ_C}{R+Z_C}} = \frac{240}{j37.7 + \frac{50(-j33.16)}{5-j33.16}} = 11.33\angle{-43.85°}\text{A}$$

$$V_{L(eff)} = Z_L I_{L(eff)} = (j37.7)(11.33\angle{-43.85°}) = 427.26\angle{-46.15°}\text{V}$$

$$V_{C(eff)} = V_{R(eff)} = V_{s(eff)} - V_{L(eff)} = 240 - (427.26\angle{-46.15°}) = 313.18\angle{-100.3°}\text{V}$$

$$I_{R(eff)} = \frac{V_{R(eff)}}{R} = \frac{313.18\angle{-100.3°}}{50} = 6.26\angle{-100.3°}\text{A}$$

$$I_{C(eff)} = \frac{V_{C(eff)}}{Z_C} = \frac{313.18\angle{-100.3°}}{-j33.16} = 9.44\angle{-10.3°}\text{A}$$

Le courant I_L débité par a source V_s est en retard de 43.85° par rapport à la tension de la source:

$$\phi = 43.85°$$

La puissance complexe consommée par la charge (qui est aussi la puissance complexe fournie par la source) est égale à:

$$S_T = V_{s(eff)} I_{L(eff)}^* = 240(11.33\angle -43.85°)^* = 1962 + j1884$$

Le facteur de puissance de la charge est donné par:

$$fp = \cos\phi = \cos(43.85°) = 0.721$$

<u>Vérification</u>:

Puissance active dans la résistance R:

$$P_R = \frac{(V_{R(eff)})^2}{R} = \frac{(313.18)^2}{50} = 1962\text{W}$$

Puissance réactive dans l'inductance L:

$$Q_L = V_{L(eff)} I_{L(eff)} = 427.26(11.33) = 4842\text{VAR}$$

Puissance réactive dans le condensateur C:

$$Q_C = V_{C(eff)} I_{C(eff)} = 313.18(9.44) = 2958\text{VAR}$$

Puissance totale:

$$S_T = P_R + j[Q_L - Q_C] = 1962 + j1884$$

<u>Exemple 7-13</u> Calcul de charge

On connecte une charge **Z** à une source sinusoïdale 60 Hz de valeur efficace 240 V.

La charge absorbe une puissance active de 25 kW et une puissance réactive de 16 kVAR.

On désire déterminer la valeur de cette charge et son facteur de puissance.

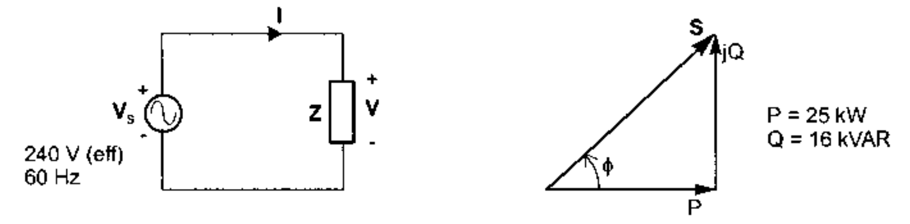


Figure 7-68 Charge inductive alimentée par une source sinusoïdale.

Le facteur de puissance de la charge est:

$$fp = \cos\phi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 16^2}} = 0.842 \text{ arrière}$$

Le courant dans la charge est égal à:

$$I_{eff} = \frac{P}{V_{eff}\cos\phi} = \frac{25000}{240 \times 0.842} = 123.67 \text{ A}$$

La résistance de la charge:

$$R = \frac{P}{I_{eff}^2} = \frac{25000}{(123.67)^2} = 1.635\Omega$$

La réactance de la charge:

$$X = \frac{Q}{I_{eff}^2} = \frac{16000}{(123.67)^2} = 1.046\Omega$$

Donc l'impédance de la charge est:

$$\mathbf{Z} = R + jX = (1.635+j1.046)\ \Omega$$

Exercices

7.1 Le circuit montré dans la figure E7-1 est en régime sinusoïdal permanent.

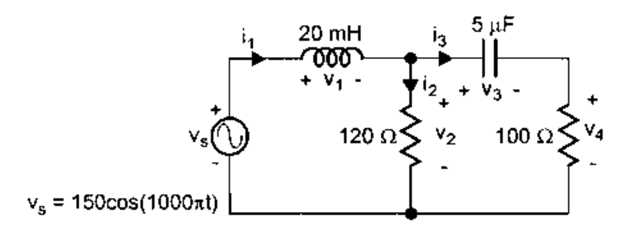


Figure E7-1

a) Déterminer les tensions et les courants du circuit.

b) Tracer un diagramme vectoriel pour illustrer les relations entre les tension et les courants du circuit.

Remarque: Le phaseur V_s est pris comme référence de phase.

7.2 Le circuit montré dans la figure E7-2 est en régime sinusoïdal permanent.

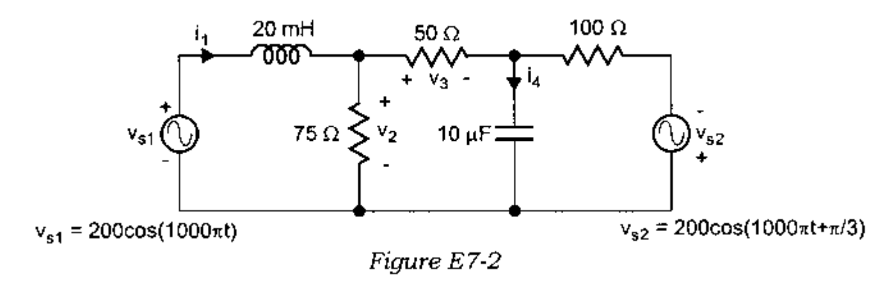


Figure E7-2

Déterminer les tensions V_2, V_3 et les courants I_1, I_4.

7.3 Le circuit montré dans la figure E7-3 est en régime sinusoïdal permanent.

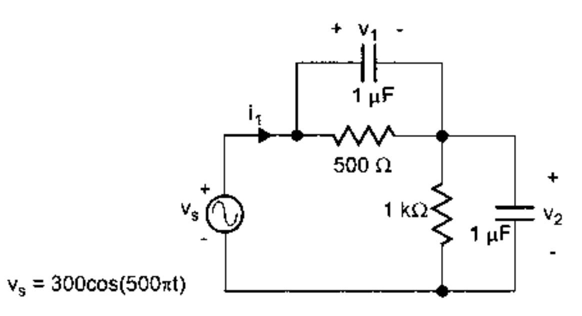


Figure E7-3

a) Calculer l'impédance Z_{eq} vue par la source.

b) Déterminer le courant I_1, la tension V_1 et la tension V_2.

c) Tracer un diagramme vectoriel illustrant la relation entre V_s, V_1 et V_2.

Remarque: Le phaseur V_s est pris comme référence.

7.4 Le circuit montré dans la figure E7-4 est en régime sinusoïdal permanent.

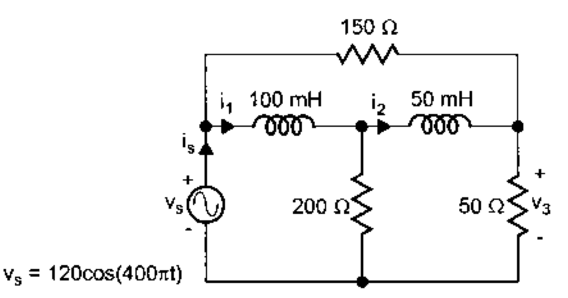


Figure E7-4

a) Déterminer le courant I_1, le courant I_2 et la tension V_3.

b) Déterminer le courant I_s débité par la source. Déduire l'impédance Z_{eq} vue par la source.

7.5 Soit le circuit montré dans la figure E7-5.

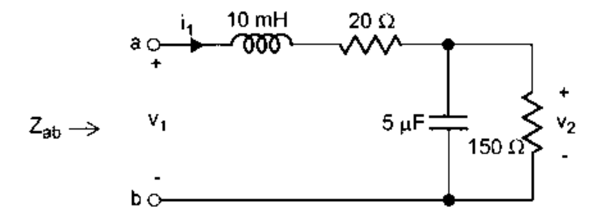


Figure E7-5

a) Déterminer l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ vue aux bornes a-b du circuit.
Tracer en fonction de la fréquence le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$.
Déterminer la fréquence à laquelle l'impédance Z_{ab} est purement résistive (phase de Z_{ab} = 0).

b) Déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \dfrac{V_2}{V_1}$.

Tracer les diagrammes de Bode représentant la réponse en fréquence de $H_1(j\omega)$.

c) Déterminer le courant d'entrée I_1 et la tension de sortie V_2 lorsqu'une tension sinusoïdale d'amplitude 50 V et de fréquence 250 Hz est appliquée à l'entrée.

7.6 Soit le circuit montré dans la figure E7-6.

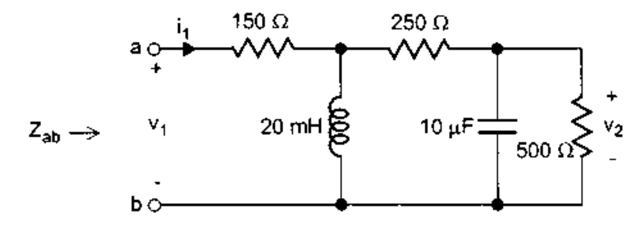


Figure E7-6

a) Déterminer l'impédance $Z_{ab}(j\omega)$ vue aux bornes a-b du circuit.
Tracer en fonction de la fréquence le module et la phase de $Z_{ab}(j\omega)$.

b) Déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \dfrac{V_2}{V_1}$.

Tracer les diagrammes de Bode représentant la réponse en fréquence de $H_1(j\omega)$.

c) Une source de tension sinusoïdale d'amplitude 100 V et de fréquence 60 Hz est connectée aux bornes a-b. Déterminer le courant I_1 et la tension de sortie V_2.

7.7 Soit le circuit montré dans la figure E7-7.

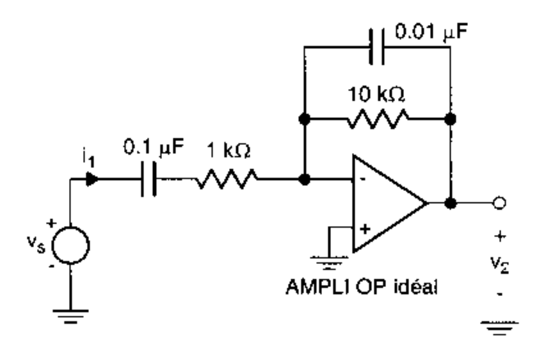


Figure E7-7

a) Déterminer l'impédance $Z_1(j\omega)$ vue par la source.
Tracer en fonction de la fréquence le module et la phase de $Z_1(j\omega)$.

b) Déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \frac{V_2}{V_s}$.

Tracer les diagrammes de Bode représentant la réponse en fréquence de $H_1(j\omega)$.

c) Une source de tension sinusoïdale d'amplitude 1 V et de fréquence 5 kHz est connectée à l'entrée. Déterminer le courant d'entrée I_1 et la tension de sortie V_2.

7.8 Soit le circuit montré dans la figure E7-8.

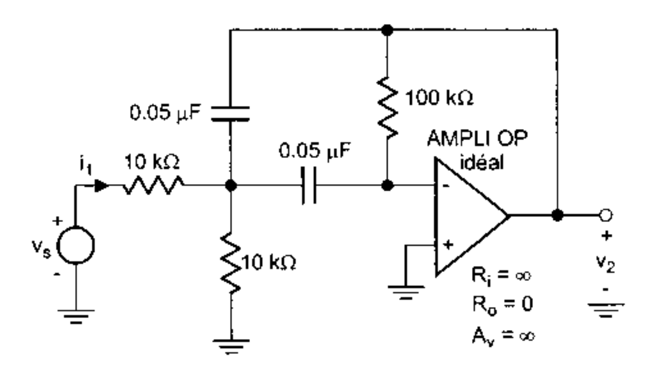


Figure E7-8

a) Déterminer l'impédance $Z_1(j\omega)$ vue par la source.
Tracer en fonction de la fréquence le module et la phase de $Z_1(j\omega)$.

b) Déterminer la fonction de transfert $H_1(j\omega) = \frac{V_2}{V_s}$.

Tracer les diagrammes de Bode représentant la réponse en fréquence de $H_1(j\omega)$.

c) Une source de tension sinusoïdale d'amplitude 5 V et de fréquence 400 Hz est connectée à l'entrée. Déterminer le courant d'entrée I_1 et la tension de sortie V_2.

7.9 Le circuit montré dans la figure E7-9 est en régime sinusoïdal permanent.

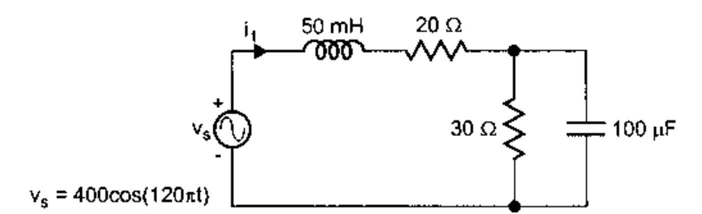


Figure E7-9

a) Déterminer l'impédance équivalente vue par la source.

b) Calculer le courant I_1.

c) Calculer les puissances apparente, active, et réactive dans la charge. Tracer le diagramme de puissance. Déterminer le facteur de puissance de la charge.

7.10 Le circuit montré dans la figure E7-10 est en régime sinusoïdal permanent.

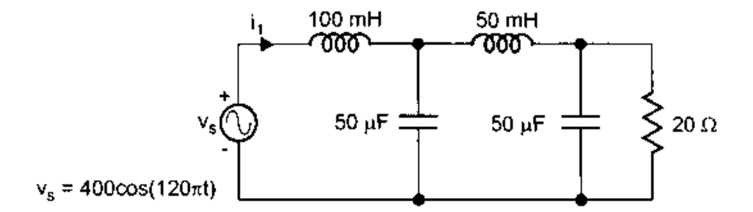


Figure E7-10

a) Déterminer l'impédance équivalente vue par la source.

b) Calculer le courant I_1.

c) Calculer les puissances apparente, active, et réactive dans la charge. Tracer le diagramme de puissance. Déterminer le facteur de puissance de la charge.

7.11 Le circuit montré dans la figure E7-11 est en régime sinusoïdal permanent.

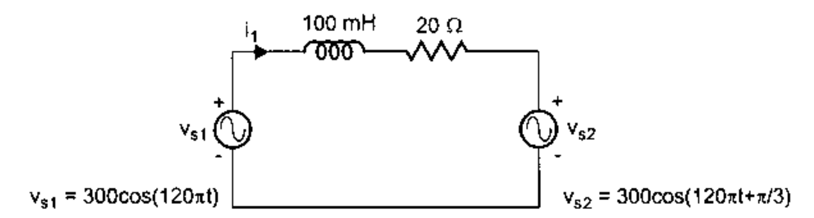


Figure E7-11

a) Calculer le courant I_1 (valeur efficace et phase).

b) Calculer la puissance dissipée dans la résistance et la puissance réactive dans l'inductance.

c) Calculer les puissances active et réactive fournies par la source V_{s1}.

7.12 Le circuit montré dans la figure E7-12 est en régime sinusoïdal permanent.

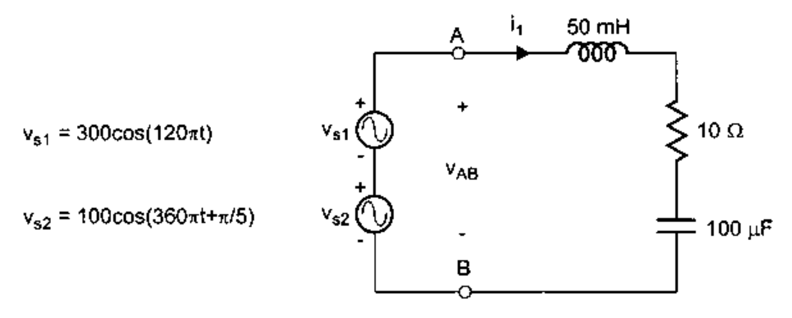


Figure E7-12

a) Tracer en fonction du temps la tension $v_{AB}(t)$.

Calculer la valeur efficace de $v_{AB}(t)$.

b) Calculer et tracer en fonction du temps le courant $i_1(t)$.

Calculer la valeur efficace de $i_1(t)$.

c) Calculer les puissances active et réactive dans la charge RLC.

7.13 Une charge **Z** est connectée à une source de tension sinusoïdale. Les formes d'ondes de la tension et du courant de la source sont montrées dans la figure E7-13.

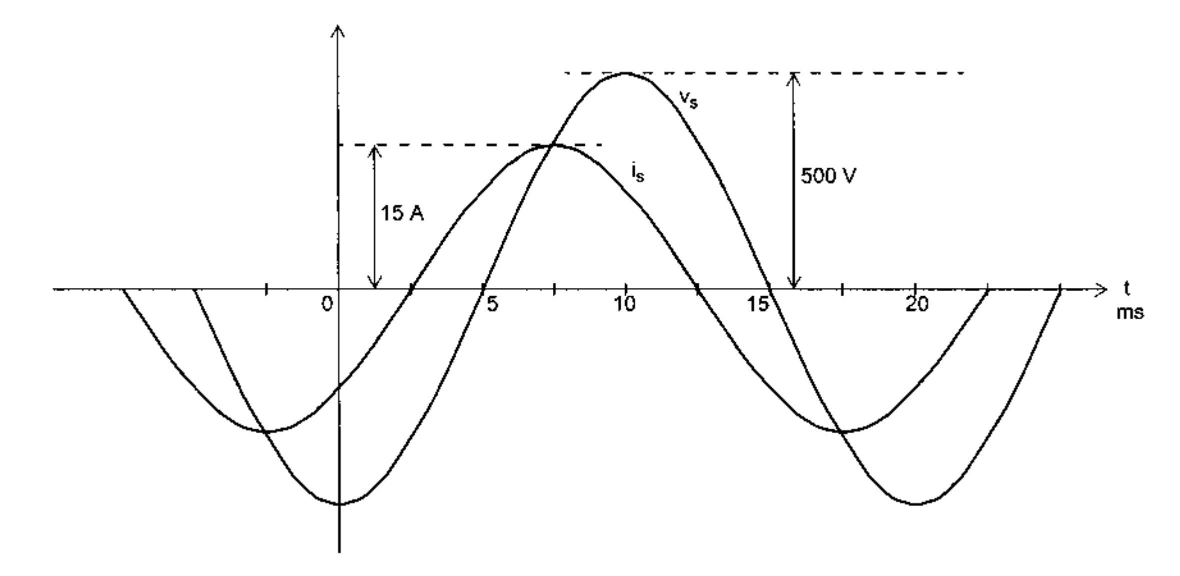


Figure E7-13

a) Déterminer l'impédance **Z**.

Calculer les puissances active et réactive dans la charge **Z**.

b) Une inductance de 100 mH est connectée en parallèle avec **Z**. Calculer la nouvelle valeur efficace et la nouvelle phase du courant i_s.

7.14 Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace des tensions et des courants montrés dans la figure E7-14.

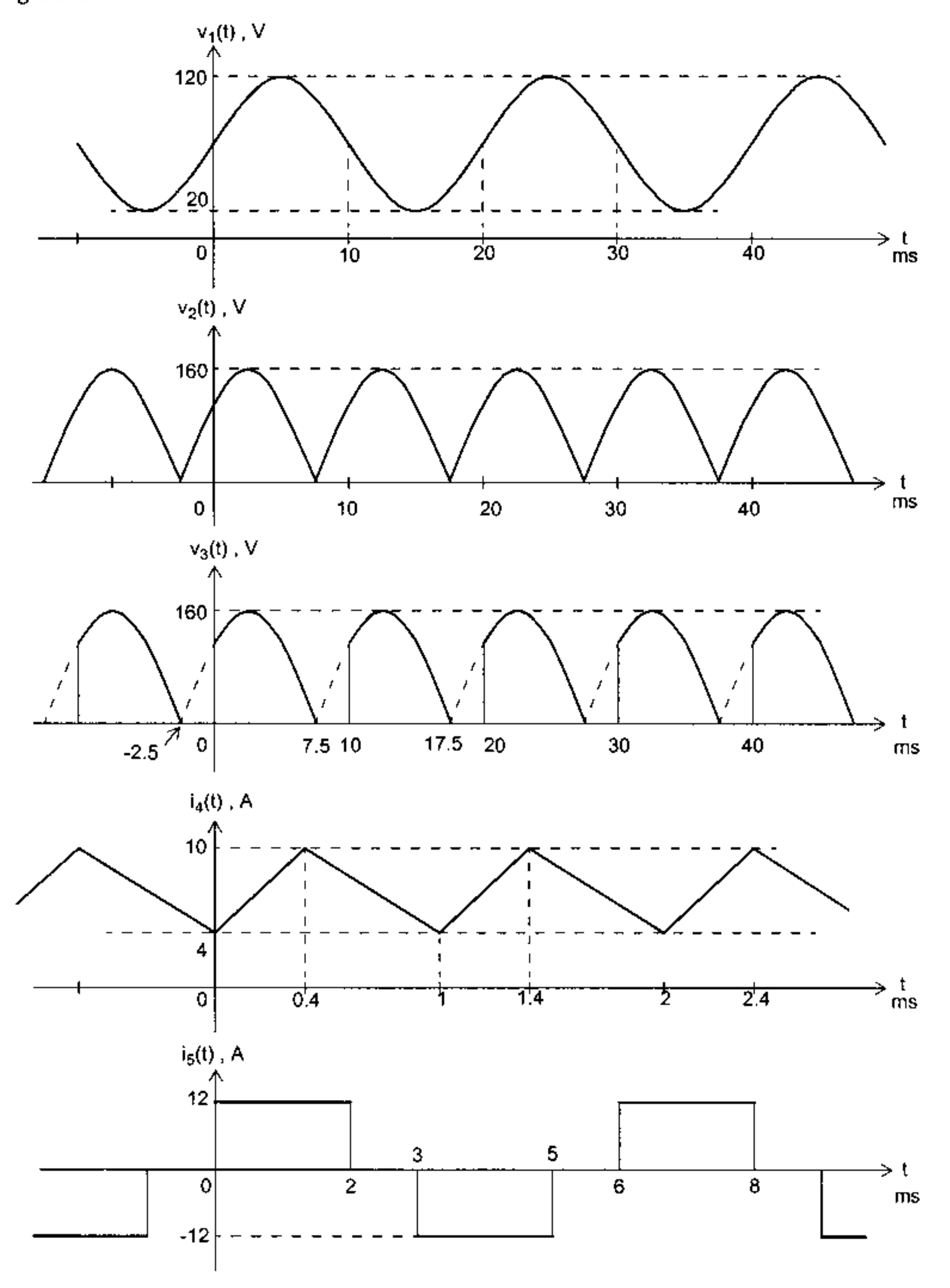


Figure E7-14

Annexe A
Rappel sur les nombres complexes

1. Définition

Un nombre complexe est composé d'une partie réelle et une partie imaginaire. On peut écrire un nombre complexe **X** sous forme cartésienne:

$\mathbf{X} = a + jb$

où a est la partie réelle et b est la partie imaginaire.

On peut aussi exprimer le nombre complexe **X** sous forme polaire:

$\mathbf{X} = xe^{j\theta}$

où x est le module de **X** (on écrit aussi $|\mathbf{X}|$) et θ est l'argument de **X** (ou l'angle de **X**).

On peut représenter le nombre complexe **X** par un vecteur dans le plan complexe.

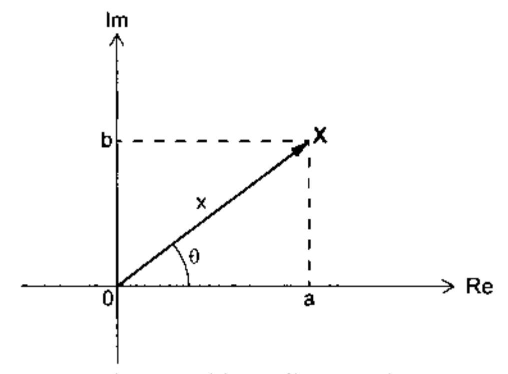


Figure A-1 Représentation graphique d'un nombre complexe dans le plan complexe.

À partir de cette figure, on déduit les relations suivantes:

$$a = x\cos\theta \qquad b = x\sin\theta$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\mathbf{X} = xe^{j\theta} = x\{\cos\theta + j\sin\theta\}$$

2. Les opérations sur les nombres complexes

Les opérations sur les nombres complexes sont des opérations vectorielles.

Addition et soustraction

L'addition et la soustraction des nombres complexes s'effectuent sous forme cartésienne.

On additionne (ou soustrait) deux nombres complexes en additionnant (ou en soustrayant) les parties réelles et les parties imaginaires respectives.

Considérons deux nombres complexes $\mathbf{X} = a + jb$ et $\mathbf{Y} = c + jd$. La somme et la différence de **X** et **Y** sont données par les relations suivantes:

$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (a + c) + j(b + d)$

$\mathbf{X} - \mathbf{Y} = (a - c) + j(b - d)$

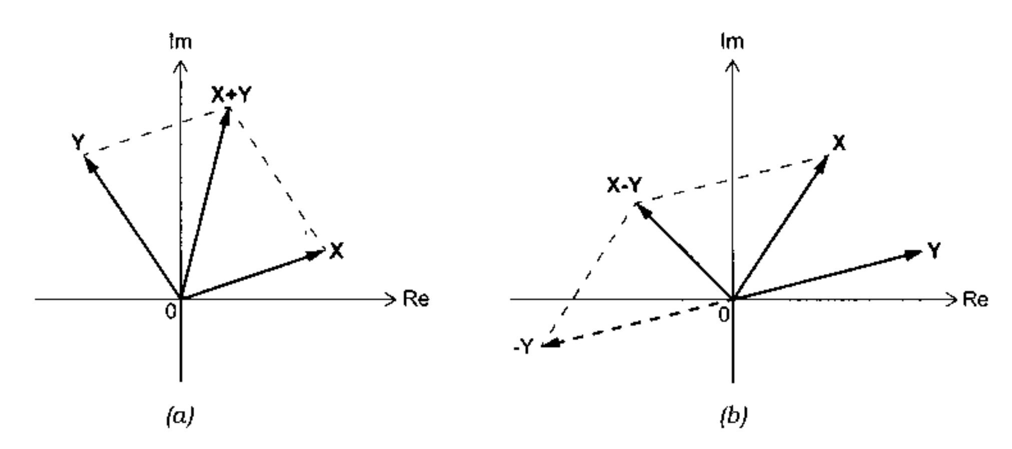


Figure A-2 Opérations sur les nombres complexes.
(a) Addition. (b) Soustraction.

Multiplication et division

La multiplication et la division des nombres complexes s'effectuent sous forme polaire.

- On multiplie deux nombres complexes en multipliant les modules et en additionnant les arguments.
- On divise deux nombres complexes en divisant les modules et en soustrayant les arguments.

Considérons deux nombres complexes $\mathbf{A} = ae^{j\alpha}$ et $\mathbf{B} = be^{j\beta}$.

Le produit de **A** et **B** est: $\mathbf{AB} = abe^{j(\alpha+\beta)}$

Le rapport de **A** et **B** est: $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \dfrac{a}{b}e^{j(\alpha-\beta)}$

3. Exemples

Soient deux nombres complexes:

$\mathbf{X} = -0.5 + j3 = 3.041e^{j1.736}$

$\mathbf{Y} = 1.25 - j2 = 2.358e^{-j1.012}$

La somme: $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (-0.5 + 1.25) + j(3 - 2) = 0.75 + j = 1.25e^{j0.927}$

La différence: $\mathbf{X} - \mathbf{Y} = (-0.5 - 1.25) + j(3 + 2) = -2 + j5 = 5.385e^{j1.951}$

Le produit: $\mathbf{XY} = (3.041 \times 2.358)e^{j(1.736 - 1.012)} = 7.171e^{j0.724}$

Le rapport: $\dfrac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \dfrac{3.041}{2.358}e^{j(1.736 + 1.012)} = 1.29e^{j2.748}$

Annexe B
Addition de deux fonctions sinusoïdales

Soient deux fonctions sinusoïdales de même fréquence:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

La somme de ces deux fonctions peut être calculée en utilisant la forme exponentielle:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Re}\left\{A_1 e^{j(\omega t + \phi_1)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{A_2 e^{j(\omega t + \phi_2)}\right\}$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{A_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \phi_2)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{[A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}]e^{j\omega t}\right\}$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\{Ce^{j\phi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{Ce^{j(\omega t + \phi)}\} = C\cos(\omega t + \phi)$$

Donc:

$$A_1\cos(\omega t + \phi_1) + A_2\cos(\omega t + \phi_2) = C\cos(\omega t + \phi)$$

Les constantes C et ϕ sont déterminées par la relation suivante:

$$Ce^{j\phi} = A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}$$

Ou bien:

$$C\cos\phi + jC\sin\phi = [A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2] + j[A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2]$$

On déduit:

$$C\cos\phi = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2$$

$$C\sin\phi = A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2$$

Finalement:

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

et:

$$C = \sqrt{(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)^2 + (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)^2}$$

Annexe C
Dérivée et intégrale d'une fonction de la forme f(t)u(t)

Considérons une fonction exponentielle qui commence à t = 0:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$$

1) La dérivée de x(t) est égale à:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[Ae^{-\alpha t}u(t)] = \frac{d}{dt}(Ae^{-\alpha t})u(t) + Ae^{-\alpha t}\frac{d}{dt}[u(t)]$$

$$\frac{dx}{dt} = (-\alpha Ae^{-\alpha t})u(t) + Ae^{-\alpha t}\delta(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = (-\alpha Ae^{-\alpha t})u(t) + A\delta(t)$$

À remarquer que l'impulsion $A\delta(t)$ représente le changement brusque de la pente de x(t) à t = 0.

2) L'intégrale de x(t) est égale à:

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt = \int_{0}^{t} Ae^{-\alpha t}dt = \left.\frac{Ae^{-\alpha t}}{-\alpha}\right|_{0}^{t} = \frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

À remarquer que la fonction u(t) est ajoutée à l'expression de l'intégrale de x(t) pour tenir compte du fait que l'intégrale est nulle pour t < 0.

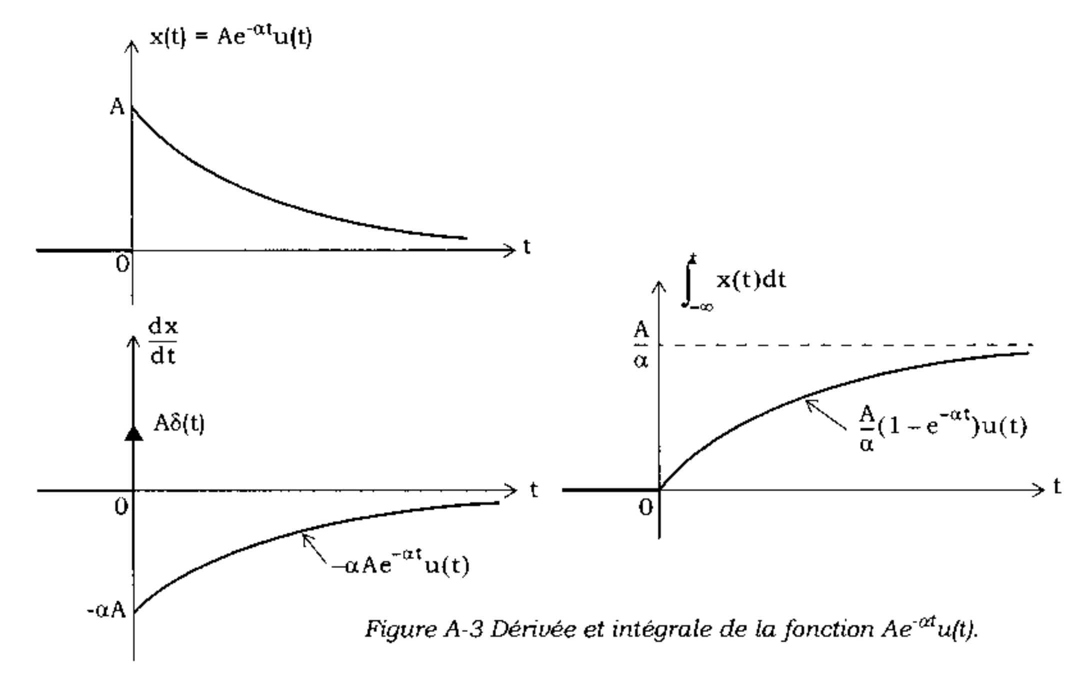


Figure A-3 Dérivée et intégrale de la fonction $Ae^{-\alpha t}u(t)$.

Annexe D
La résonance dans les circuits RLC

Considérons un circuit RLC alimenté par une source sinusoïdale de fréquence variable montré dans la figure A-4.

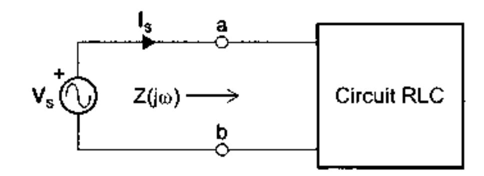


Figure A-4 Impédance d'un circuit RLC en régime sinusoïdal permanent.

L'impédance du circuit vue par la source est une fonction de la fréquence:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_s}$$

Le circuit est *en résonance* à la fréquence ω_0 si l'impédance $\mathbf{Z}(j\omega)$ est *purement résistive* à cette fréquence, c'est à dire:

$$\mathbf{Z}(j\omega_0) = R_0$$

À la fréquence de résonance, il n'y a pas d'échange d'énergie entre le circuit et la source. Le circuit RLC consomme une puissance active qui est dissipée dans les résistances sous forme thermique. L'énergie emmagasinée dans le circuit est constante et est échangée entre les inductances et les condensateurs à une fréquence de $2\omega_0$. Lorsque l'énergie dans les inductances est maximale, l'énergie dans les condensateurs est nulle et vice versa.

Le *facteur de résonance* du circuit est défini comme:

$$Q = 2\pi \times \frac{W_m}{W_d} = \frac{Q_L}{P} = \frac{Q_C}{P}$$

où W_m est la valeur maximale de l'énergie emmagasinée,

W_d est l'énergie dissipée pendant une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

Q_L est la puissance réactive totale dans les inductances,

Q_C est la puissance réactive totale dans les condensateurs,

P est la puissance active totale dissipée dans les résistances.

Exemple 1: Résonance série

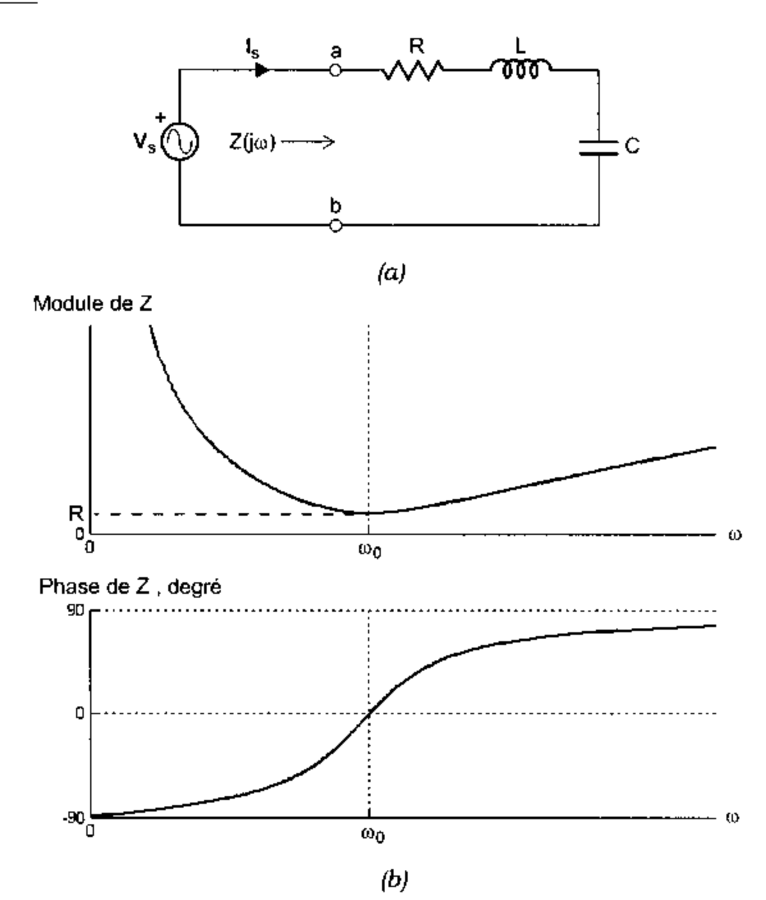


Figure A-5 Circuit RLC à résonance série.
(a) Circuit. (b) Impédance du circuit en fonction de la fréquence.

L'impédance du circuit est: $\mathbf{Z}(j\omega) = R + j\left[\mathbf{L}\omega - \frac{1}{C\omega}\right]$

L'impédance $\mathbf{Z}(j\omega)$ est réelle lorsque sa partie imaginaire est nulle, c'est à dire lorsque $\left(\mathbf{L}\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ ou lorsque $\mathbf{L}\omega = \frac{1}{C\omega}$.

Donc, la fréquence de résonance est égale à: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

À la fréquence de résonance, l'impédance Z(jω) est égale à R.

Le facteur de résonance de ce circuit RLC série est: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Exemple 2: Résonance parallèle

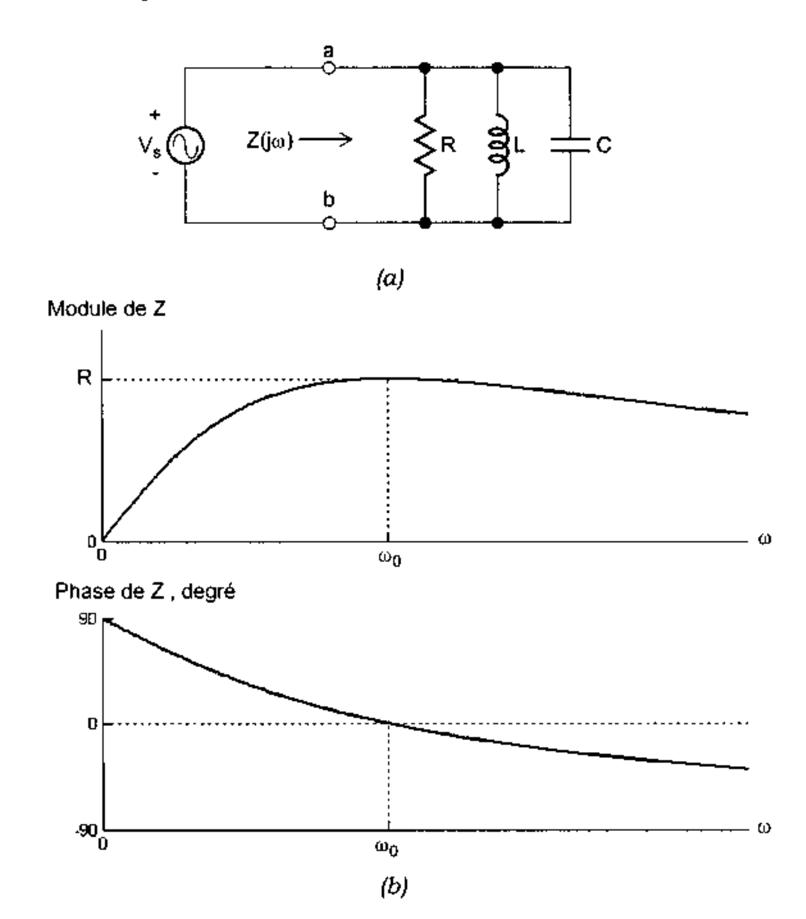


Figure A-6 Circuit RLC à résonance parallèle.
(a) Circuit. (b) Impédance en fonction de la fréquence.

L'impédance du circuit est:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

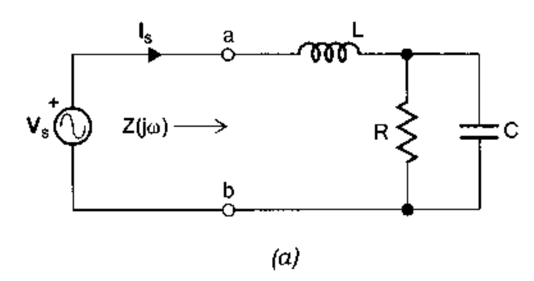
$$\mathbf{Z}(j\omega) = \frac{\omega^2 L^2 R + j\omega L R^2 (1 - LC\omega^2)}{R^2 (1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

La fréquence de résonance est égale à: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

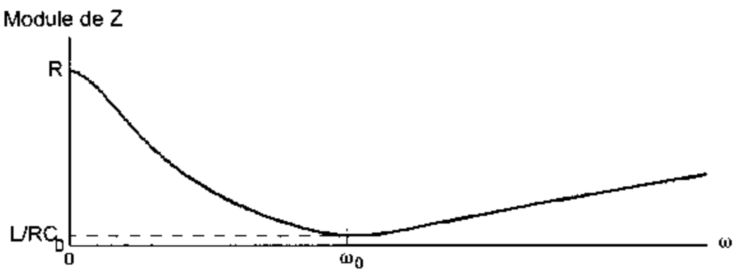
À la fréquence de résonance, l'impédance **Z**(jω) est égale à R.

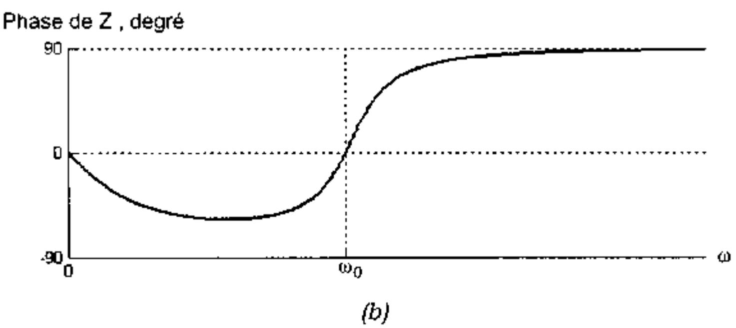
Le facteur de résonance du circuit RLC parallèle est: $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

Exemple 3: Résonance série-parallèle



(a)





(b)

Figure A-7 Circuit à résonance série-parallèle.
(a) Circuit. (b) Impédance du circuit en fonction de la fréquence.

L'impédance du circuit est: $Z(j\omega) = jL\omega + \dfrac{R \times \dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\left[L\omega - \dfrac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right]$

L'impédance **Z**(jω) est réelle lorsque sa partie imaginaire est nulle, c'est à dire lorsque

$\left[L\omega - \dfrac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right] = 0$.

La fréquence de résonance est donc égale à: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{L}{R^2C}}$.

À la fréquence de résonance, l'impédance Z(jω) est égale à $\dfrac{L}{RC}$.

Le facteur de résonance de ce circuit RLC est: $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sqrt{1 - \dfrac{L}{R^2C}}$

Exemple 4: Résonance parallèle-série

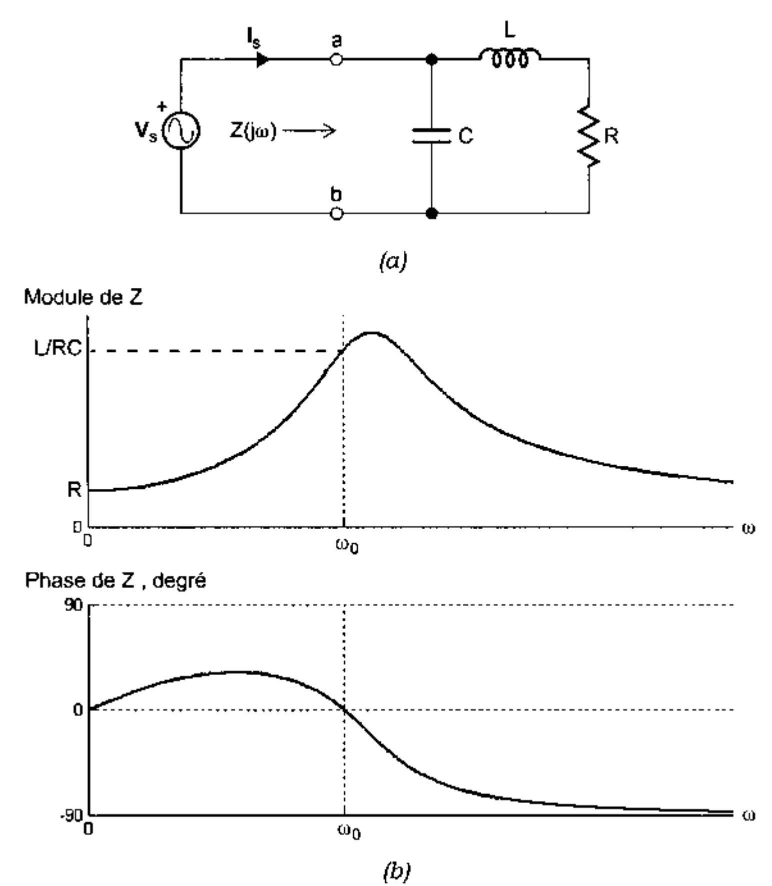


Figure A-8 Circuit à résonance série-parallèle.
(a) Circuit. (b) Impédance du circuit en fonction de la fréquence.

L'impédance du circuit est: $Z(j\omega) = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega} \times (R + jL\omega)}{\dfrac{1}{jC\omega} + (R + jL\omega)} = \dfrac{R + j[\omega L(1 - LC\omega^2) - R^2C\omega]}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$

L'impédance **Z**(jω) est réelle lorsque sa partie imaginaire est nulle, c'est à dire lorsque $[\omega L(1 - LC\omega^2) - R^2C\omega] = 0$.

La fréquence de résonance est donc égale à: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{R^2C}{L}}$.

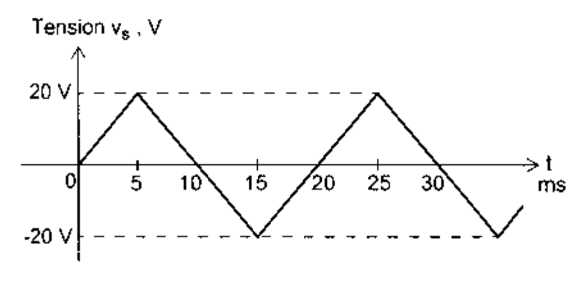
À la fréquence de résonance, l'impédance Z(jω) est égale à $\dfrac{L}{RC}$.

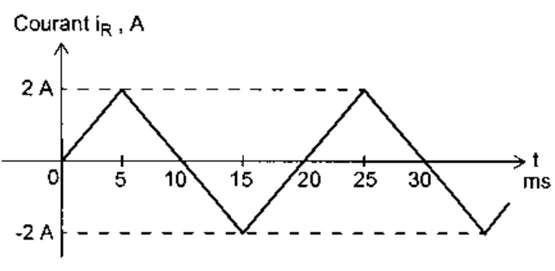
Le facteur de résonance de ce circuit RLC est: $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sqrt{1 - \dfrac{L}{R^2C}}$

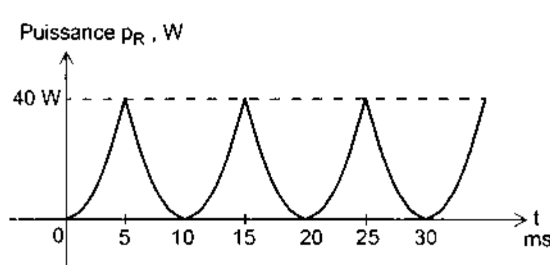
Réponses aux exercices

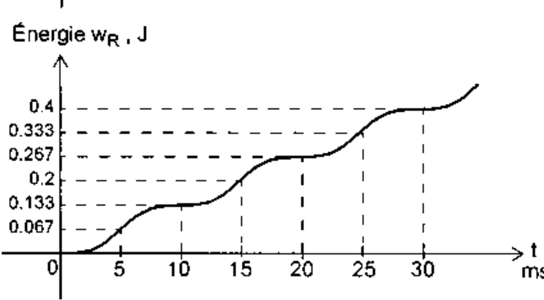
Chapitre 1

1.1

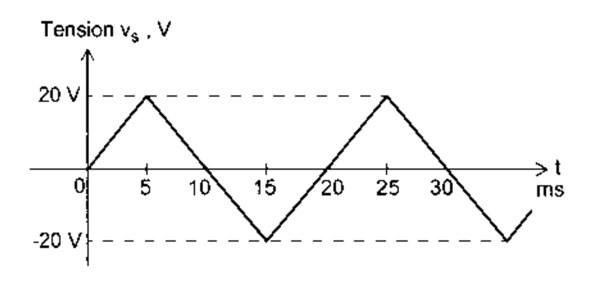


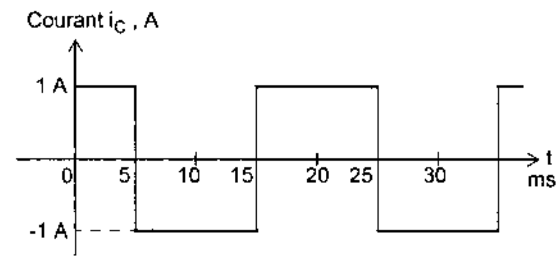


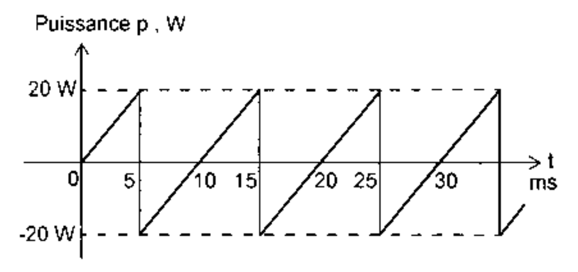


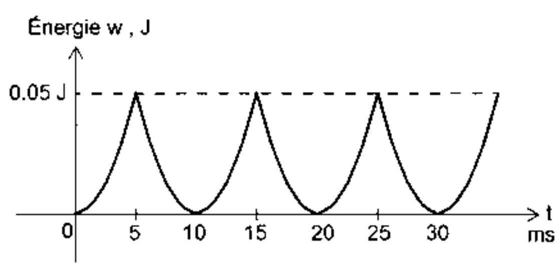


1.2

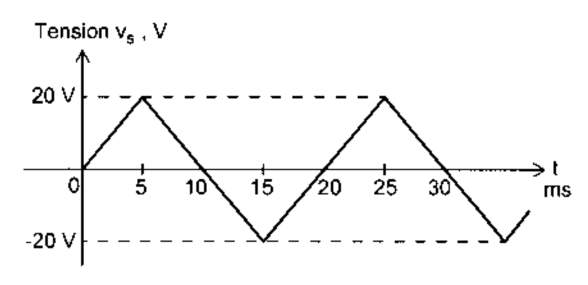


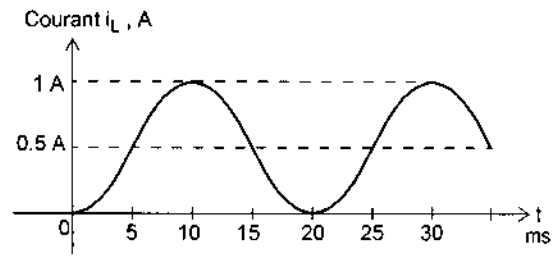


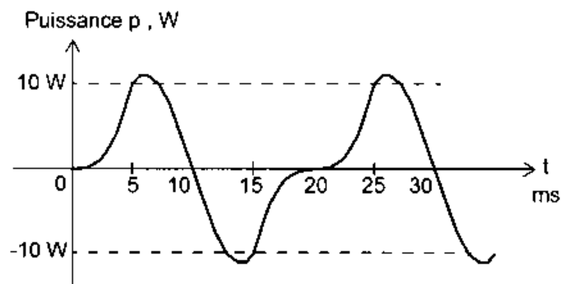


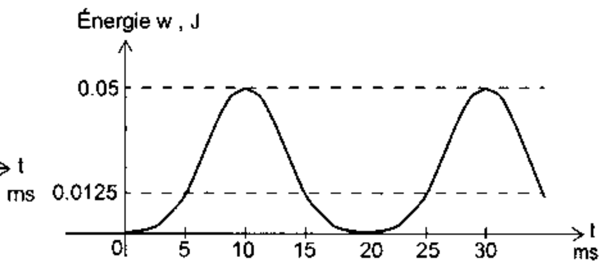


1.3









1.4

v_s — 24 V — 0 — 0.1 — t s

i_1 — 0.24 A — 0 — 0.1 — t s

$v_L = 40i_1$ — 9.6 V — 0 — 0.1 — t s

i_L — 4.8 A — 0 — 0.1 — t s

$p_L = v_L i_L$ — 46.08 W — 0 — 0.1 — t s

w_L — 2.304 J — 0 — 0.1 — t s

1.5

i_s — 0.8 A — 0 — 0.1 — t s

v_C — 400 V — 0 — 0.1 — t s

$i_R = 0.015\ v_C$ — 6 A — 0 — 0.1 — t s

p_R — 720 W — 0 — 0.1 — t s

w_R — 24 J — pente = 720 J/s — 0 — 0.1 — t s

w_C — 16 J — 0 — 0.1 — t s

1.6

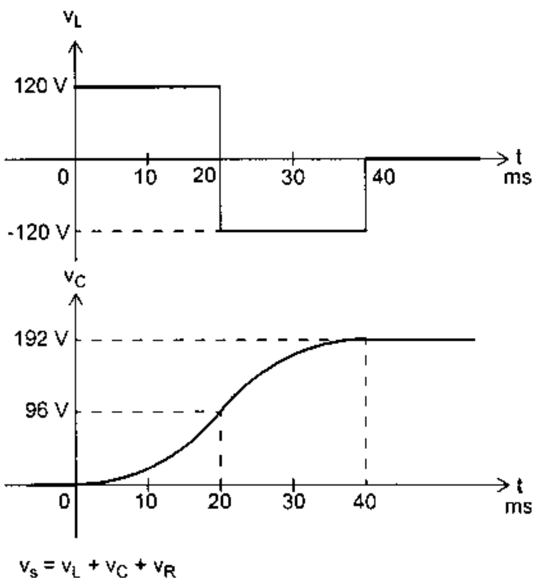
v_s — 160 V — -160 V — 0 — 10 — 20 — 30 — 40 — t ms

i_1 — 0.32 A — -0.32 A — 0 — 10 — 20 — 30 — 40 — t ms

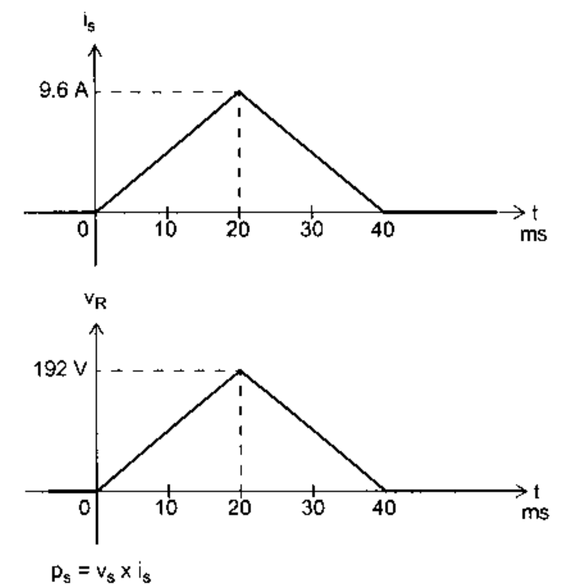
i_2 — 1.6 A — -1.6 A — 0 — 10 — 20 — 30 — 40 — t ms

p_R — 51.2 W — 0 — 10 — 20 — 30 — 40 — t ms

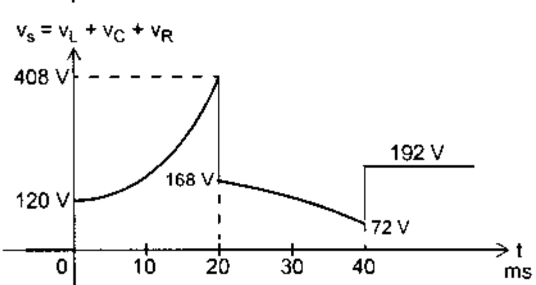
1.7



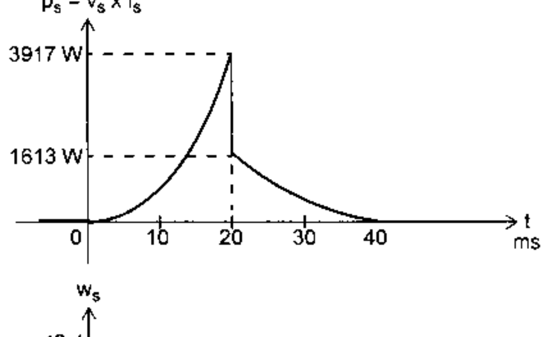
vL
120 V
-120 V
0
10
20
30
40
t
ms
vC
192 V
96 V



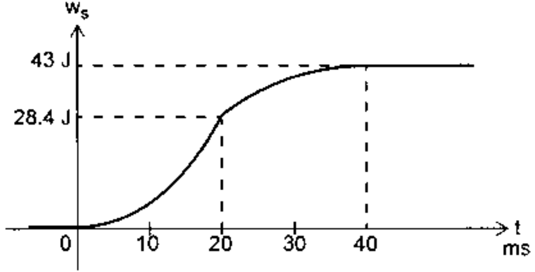
is
9.6 A
0
10
20
30
40
t
ms
vR
192 V



vs = vL + vC + vR
408 V
192 V
168 V
120 V
72 V
0
10
20
30
40
t
ms

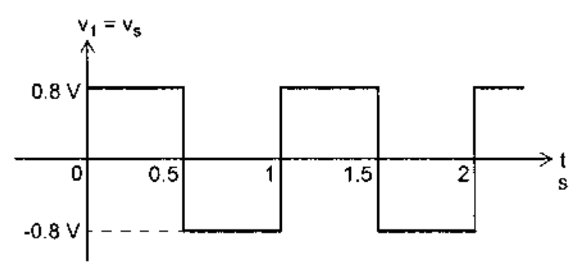


ps = vs x is
3917 W
1613 W
0
10
20
30
40
t
ms

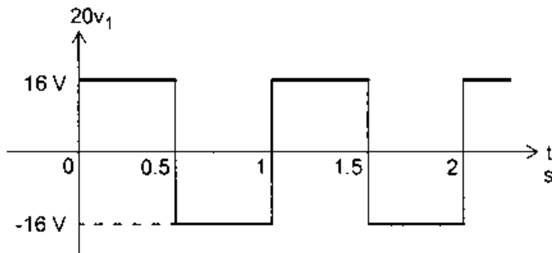


ws
43 J
28.4 J
0
10
20
30
40
t
ms

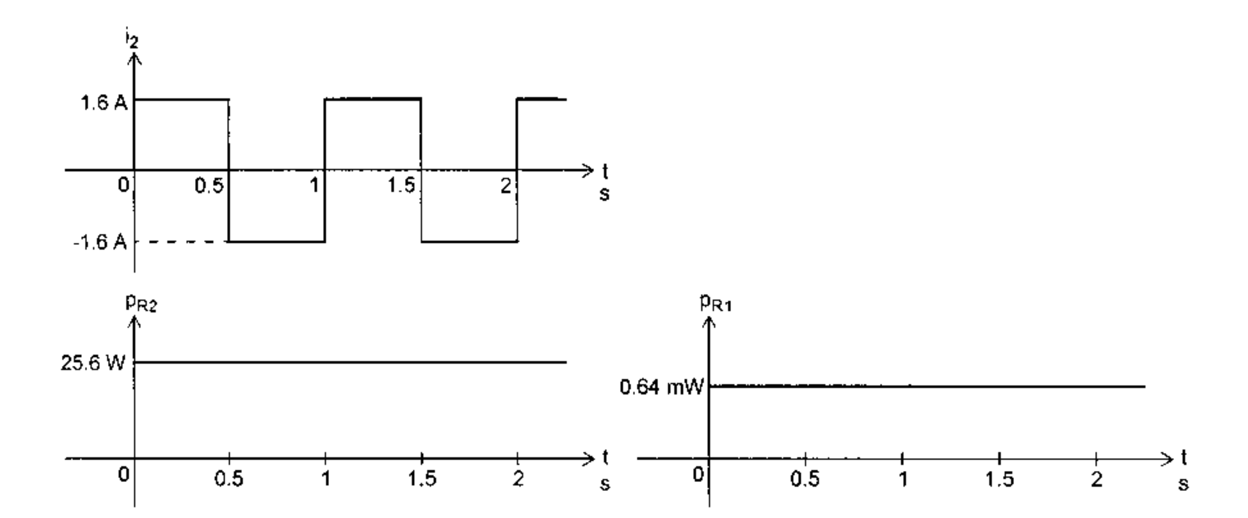
1.8



v1 = vs
0.8 V
-0.8 V
0
0.5
1
1.5
2
t
s

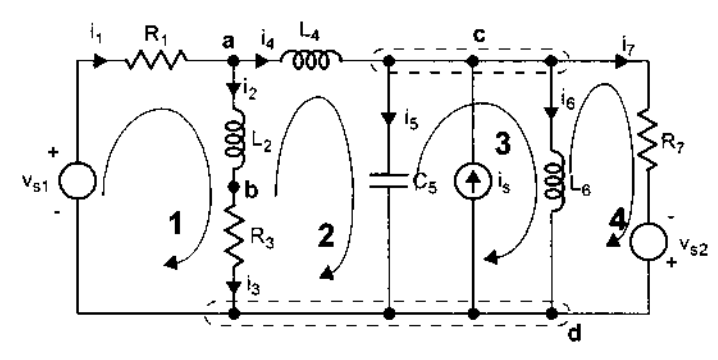


20v1
16 V
-16 V
0
0.5
1
1.5
2
t
s



Chapitre 2

2.1



- au noeud a $\quad i_1 - i_2 - i_4 = 0$
- au noeud b $\quad i_2 - i_3 = 0$
- au noeud c $\quad i_4 - i_5 - i_6 - i_7 = -i_s$
- maille 1: $\quad v_1 + v_2 + v_3 = v_{s1}$
- maille 2: $\quad v_4 + v_5 - v_3 - v_2 = 0$
- maille 3: $\quad v_6 - v_5 = 0$
- maille 4: $\quad v_7 - v_6 = v_{s2}$

2.2

$v_1 = 150\sin(120\pi t)$ $\qquad v_2 = 122.73\sin(120\pi t)$

$v_3 = 27.27\sin(120\pi t)$ $\qquad v_4 = 27.27\sin(120\pi t)$

$i_1 = 0.75\sin(120\pi t)$ $\qquad i_2 = 0.818\sin(120\pi t)$

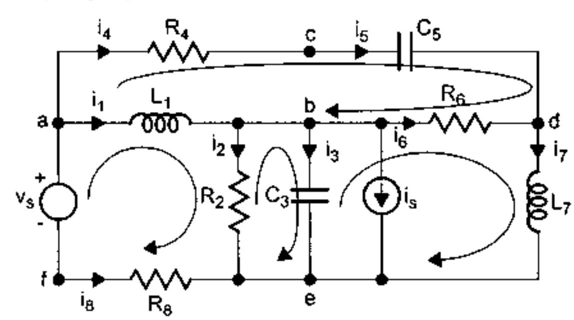
$i_3 = 0.545\sin(120\pi t)$ $\qquad i_4 = 0.273\sin(120\pi t)$

2.3	a)	R_{eq} = 102.38Ω	
	b)	v_6 = 18.6 V	i_6 = 0.186 A
		v_5 = 9.3 V	i_5 = 0.186 A
		v_4 = 27.9 V	i_4 = 0.279 A
		v_3 = 23.25 V	i_3 = 0.465 A
		v_2 = 51.2 V	i_2 = 0.512 A
		v_1 = 48.84 V	i_1 = 0.9767 A
2.4	a)	R_{eq} = 151.80Ω	
	b)	i_1 = 5 A	v_1 = 375 V
		i_2 = 3.20 A	v_2 = 384 V
		i_3 = 1.80 A	v_3 = 180 V
		i_4 = 0.60 A	v_4 = 60 V
		i_5 = -1.80 A	v_5 = -144 V
		i_6 = 1.20 A	v_6 = 60 V
2.5	a)	R_T = 51.61 Ω	v_T = 17.2 V
	b)	i_x = 0.169 A	
2.6	a)	R_T = 42.97 Ω	v_T = -16.21V
	b)	i_x = -0.238 A	
2.7	a)	R_T = 50 Ω	v_T = -55cos(500πt)
	b)	i_x = -0.44cos(500πt)	
2.8	a)	R_T = 93.75 Ω	v_T = 175 V
	b)	v_x = 52.34 V	
2.9		i_1 = 1.232 A	i_2 = 0.474 A
		i_3 = 0.758 A	i_4 = -1.742 A
		i_5 = -0.758 A	
2.10	a)	R_{T1} = 95 Ω	v_{T1} = 72 V
	b)	R_{T2} = 18.75 Ω	v_{T2} = 90 V
	c)	i_x = -0.117 A	
2.11	i_x = 1.034 A		
2.12	a)	R_{T1} = 118.18 Ω	v_{T1} = 27.27 V
		R_{T2} = 21.82 Ω	v_{T2} = 87.27 V
	b)	i_x = 0.387 A	

Chapitre 3

3.1

a) Méthode directe (longue).



<u>8 relations v-i des éléments</u>

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \qquad v_5 = \frac{1}{C_5}\int i_5 dt$$

$$v_2 = R_2 i_2 \qquad v_6 = R_6 i_6$$

$$v_3 = \frac{1}{C_3}\int i_3 dt \qquad v_7 = L_7\frac{di_7}{dt}$$

$$v_4 = R_4 i_4 \qquad v_8 = R_8 i_8$$

<u>4 équations de courants</u>

$$i_1 + i_4 + i_8 = 0$$

$$i_1 - i_2 - i_3 - i_6 = i_s$$

$$i_4 - i_5 = 0$$

$$i_6 - i_7 + i_5 = 0$$

<u>4 équations de tensions</u>

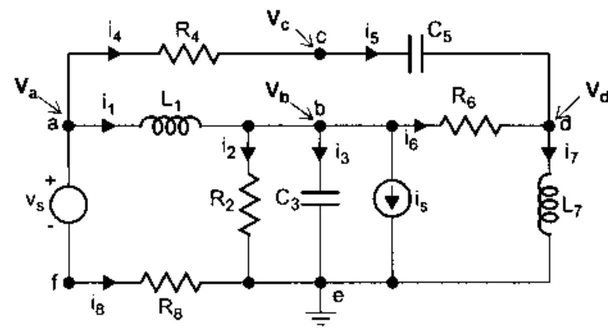
$$v_1 + v_2 - v_8 = v_s$$

$$-v_2 + v_3 = 0$$

$$v_6 + v_7 - v_3 = 0$$

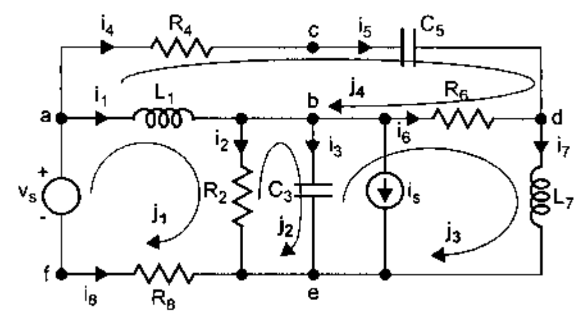
$$v_4 + v_5 - v_6 - v_1 = 0$$

b) Méthode des noeuds.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_8}+\frac{1}{L_1}\int dt & -\frac{1}{L_1}\int dt & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{1}{L_1}\int dt & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_1}\int dt+\frac{1}{R_6}+C_3\frac{d}{dt} & 0 & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_4} & 0 & \frac{1}{R_4}+C_5\frac{d}{dt} & -C_5\frac{d}{dt} \\ 0 & -\frac{1}{R_6} & -C_5\frac{d}{dt} & \frac{1}{R_6}+\frac{1}{L_7}\int dt+C_5\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_8} \\ -i_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Méthode des mailles.

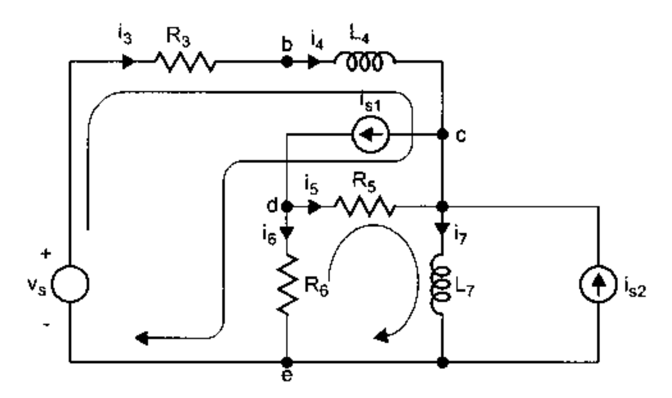


$$\begin{bmatrix} L_1\frac{d}{dt}+R_2+R_8 & -R_2 & 0 & -L_1\frac{d}{dt} \\ -R_2 & R_2+\frac{1}{C_3}\int dt & -\frac{1}{C_3}\int dt & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_3}\int dt & R_6+L_7\frac{d}{dt}+\frac{1}{C_3}\int dt & -R_6 \\ -L_1\frac{d}{dt} & 0 & -R_6 & R_4+\frac{1}{C_5}\int dt+R_6+L_1\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ \frac{1}{C_3}\int i_s dt \\ -\frac{1}{C_3}\int i_s dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)	Méthode longue	8 équations
	Méthode des noeuds	4 équations
	Méthode des mailles	4 équations

3.2

a) Méthode directe (longue).



<u>5 relations v-i des éléments</u>

$v_3 = R_3 i_3$ $\qquad$ $v_6 = R_6 i_6$

$v_4 = L_4\frac{di_4}{dt}$ $\qquad$ $v_7 = L_7\frac{di_7}{dt}$

$v_5 = R_5 i_5$

<u>3 équations de courants</u>

$i_3 - i_4 = 0$

$i_5 + i_6 = i_{s1}$

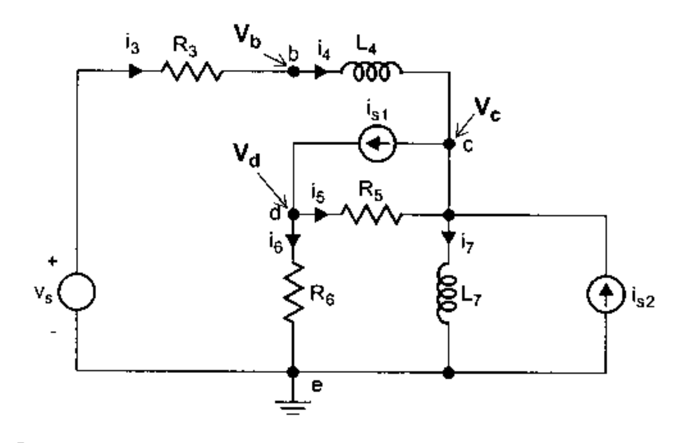
$i_4 + i_5 - i_7 = i_{s1} - i_{s2}$

<u>2 équations de tensions</u>

$v_3 + v_4 - v_5 + v_6 = v_s$

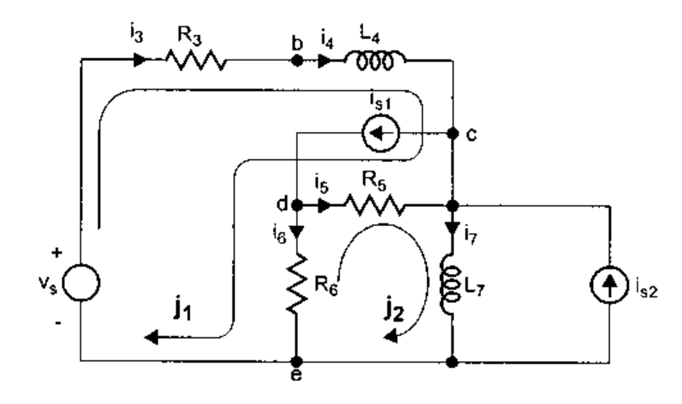
$v_5 + v_7 - v_6 = 0$

b) Méthode des noeuds.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3}+\frac{1}{L_4}\int dt & -\frac{1}{L_4}\int dt & 0 \\ -\frac{1}{L_4}\int dt & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{L_4}\int dt+\frac{1}{L_7}\int dt & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_3} \\ i_{s2}-i_{s1} \\ i_{s1} \end{bmatrix}$$

c) Méthode des mailles.



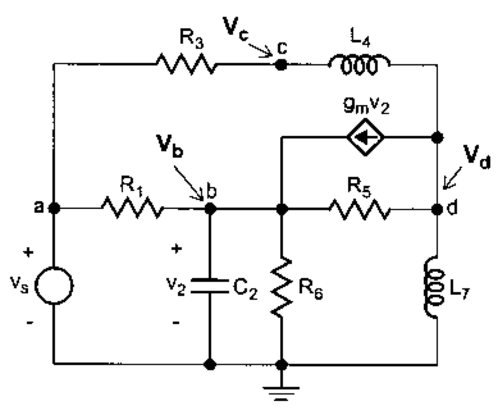
$$\begin{bmatrix} R_3+L_4\frac{d}{dt}+R_5+R_6 & -R_5-R_6 \\ -R_5-R_6 & L_7\frac{d}{dt}+R_5+R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s+R_5 i_{s1} \\ -R_5 i_{s1}-L_7\frac{di_{s2}}{dt} \end{bmatrix}$$

d)

Méthode longue	5 équations
Méthode des noeuds	3 équations
Méthode des mailles	2 équations

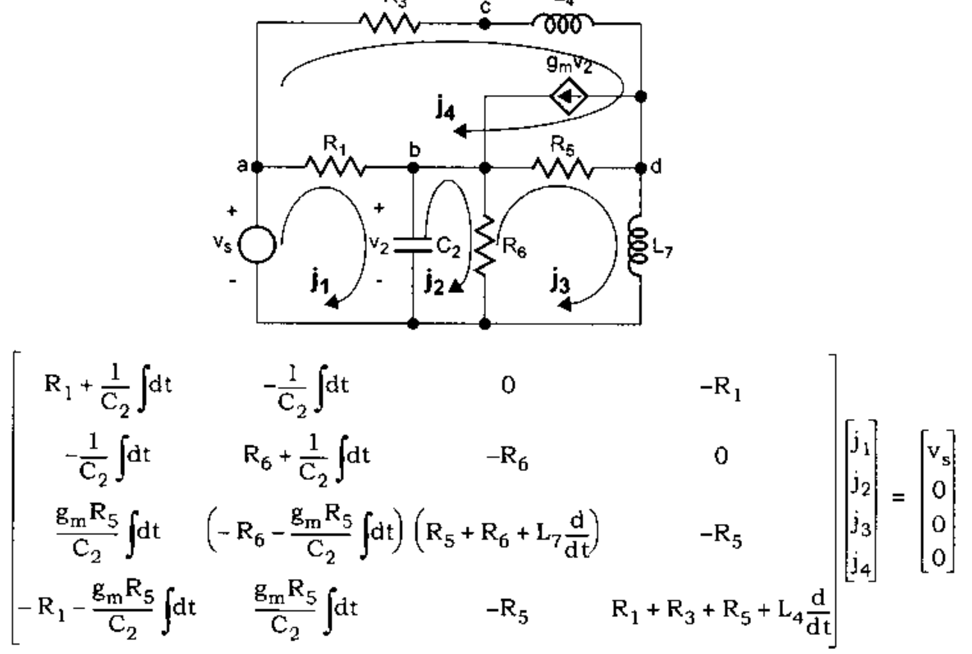
3.3

a) Méthode des noeuds.



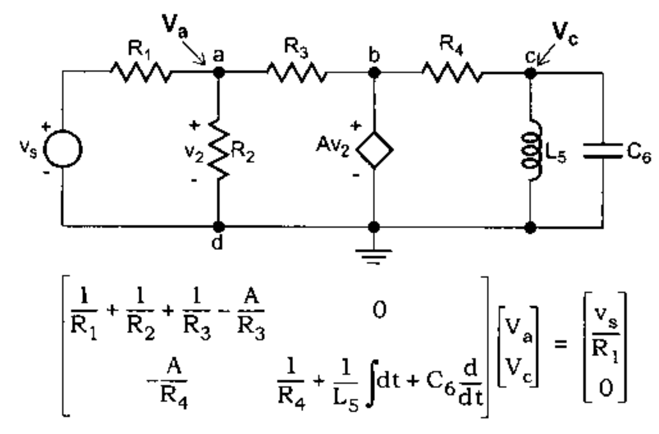
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+C_2\frac{d}{dt}-g_m & 0 & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{L_4}\int dt & -\frac{1}{L_4}\int dt \\ -\frac{1}{R_5}+g_m & -\frac{1}{L_4}\int dt & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{L_4}\int dt+\frac{1}{L_7}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ \frac{v_s}{R_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles.



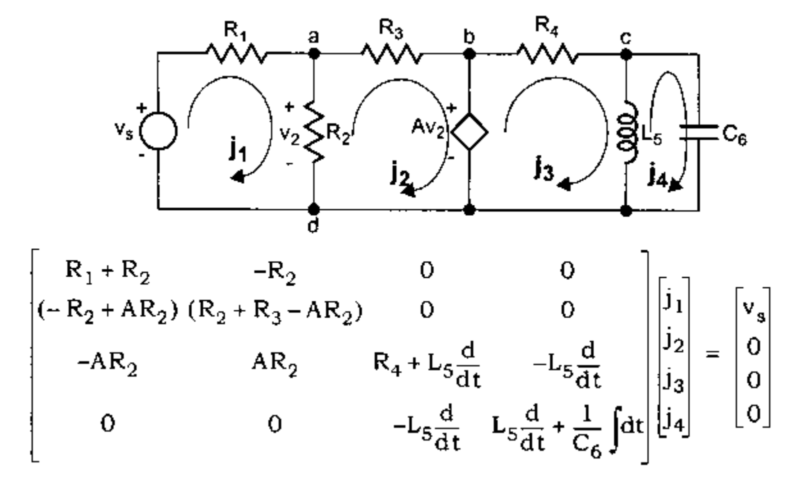
$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{C_2}\int dt & -\frac{1}{C_2}\int dt & 0 & -R_1 \\ -\frac{1}{C_2}\int dt & R_6+\frac{1}{C_2}\int dt & -R_6 & 0 \\ \frac{g_m R_5}{C_2}\int dt & \left(-R_6-\frac{g_m R_5}{C_2}\int dt\right) & \left(R_5+R_6+L_7\frac{d}{dt}\right) & -R_5 \\ -R_1-\frac{g_m R_5}{C_2}\int dt & \frac{g_m R_5}{C_2}\int dt & -R_5 & R_1+R_3+R_5+L_4\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4 a) Méthode des noeuds.



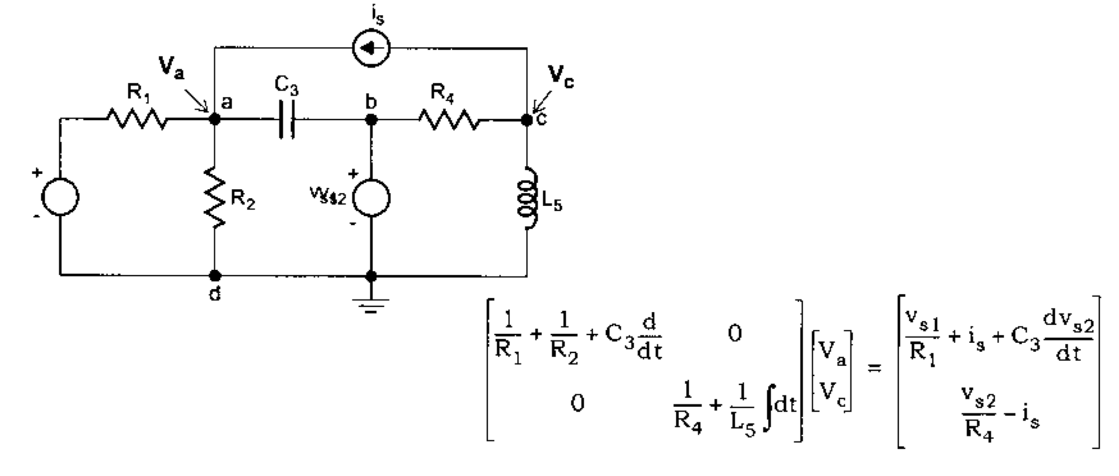
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{A}{R_3} & 0 \\ -\frac{A}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{L_5}\int dt + C_6\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles.



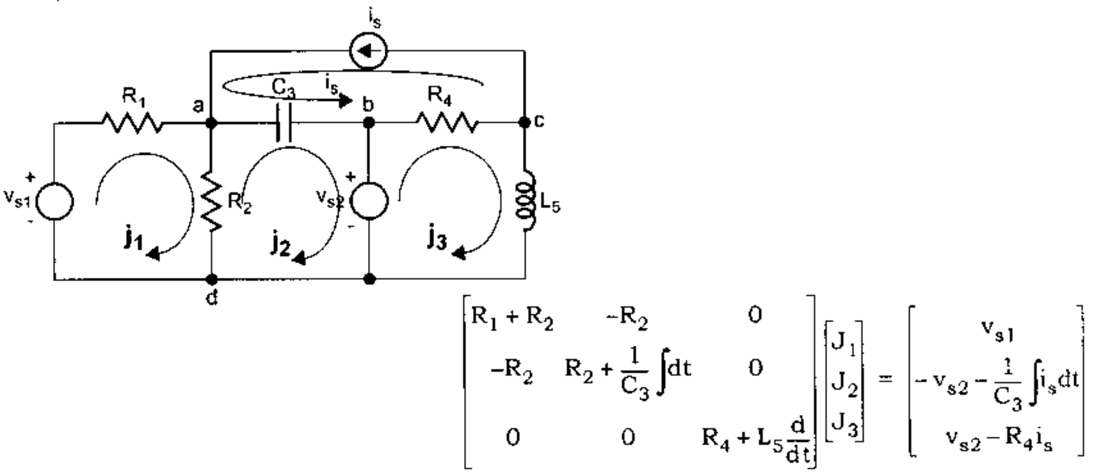
$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ (-R_2+AR_2) & (R_2+R_3-AR_2) & 0 & 0 \\ -AR_2 & AR_2 & R_4+L_5\frac{d}{dt} & -L_5\frac{d}{dt} \\ 0 & 0 & -L_5\frac{d}{dt} & L_5\frac{d}{dt}+\frac{1}{C_6}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.5 a) Méthode des noeuds



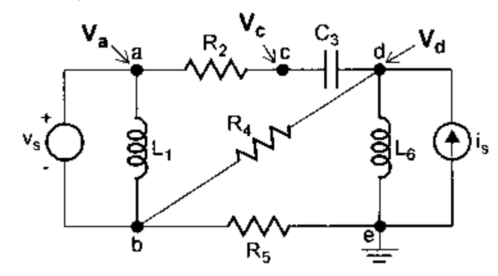
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_3\frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{L_5}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{s1}}{R_1}+i_s+C_3\frac{dv_{s2}}{dt} \\ \frac{v_{s2}}{R_4}-i_s \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles



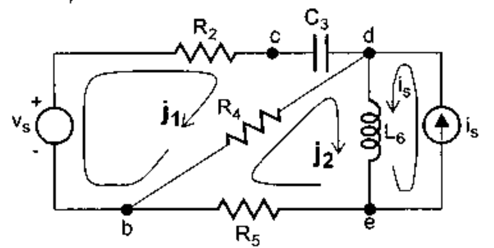
$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+\frac{1}{C_3}\int dt & 0 \\ 0 & 0 & R_4+L_5\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ -v_{s2}-\frac{1}{C_3}\int i_s dt \\ v_{s2}-R_4 i_s \end{bmatrix}$$

3.6 a) Méthodes des noeuds



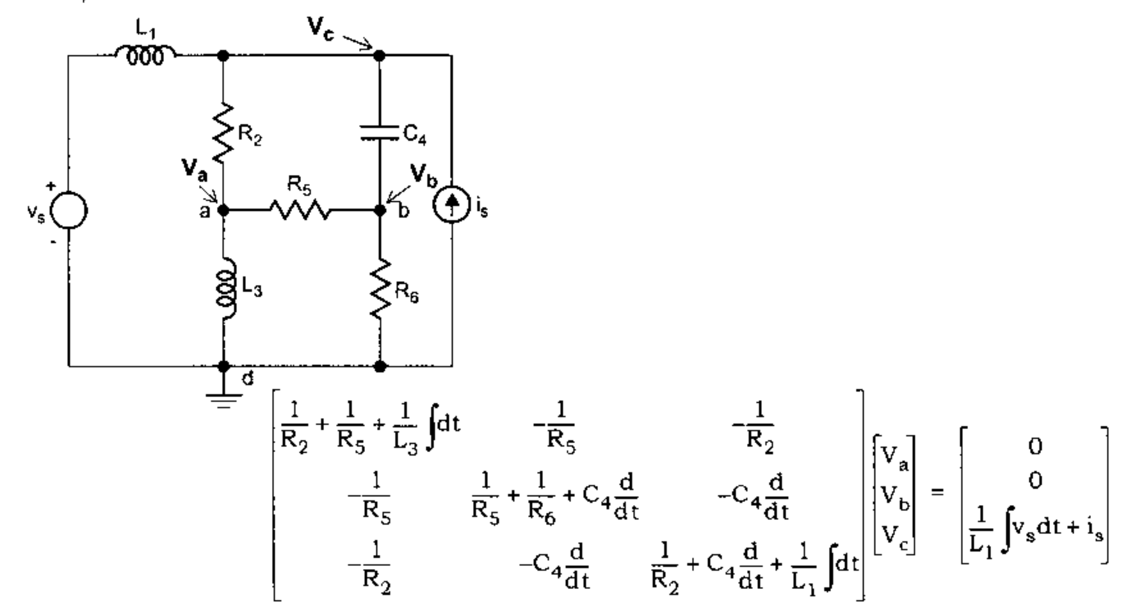
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+C_3\frac{d}{dt} & -C_3\frac{d}{dt} \\ -\frac{1}{R_4} & -C_3\frac{d}{dt} & \frac{1}{R_4}+C_3\frac{d}{dt}+\frac{1}{L_6}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_5}+\frac{v_s}{R_4} \\ 0 \\ i_s-\frac{v_s}{R_4} \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles



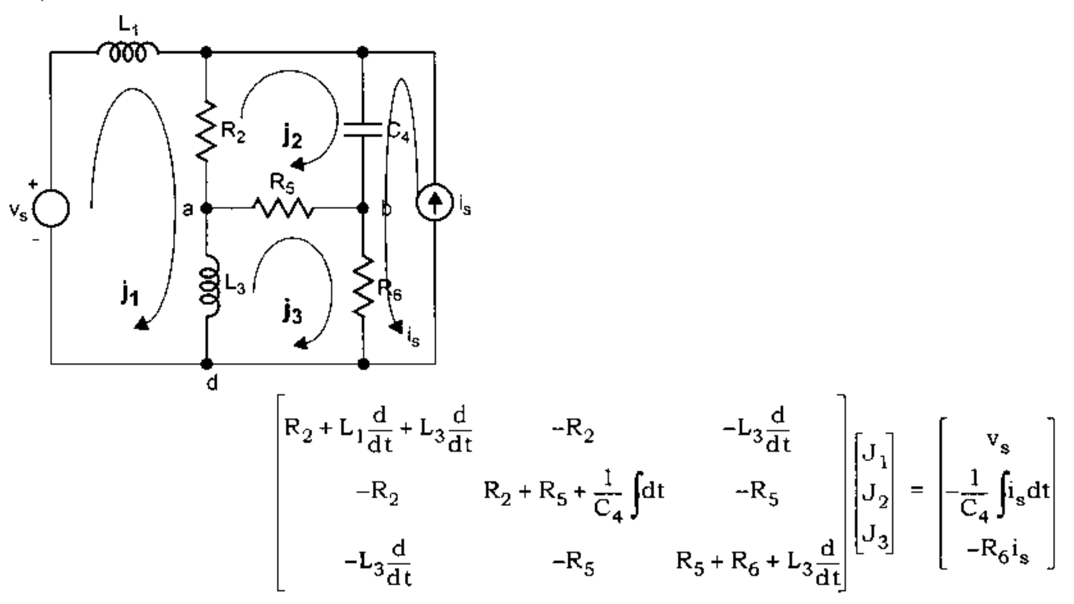
$$\begin{bmatrix} R_2+\frac{1}{C_3}\int dt+R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4+R_5+L_6\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ -L_6\frac{di_s}{dt} \end{bmatrix}$$

3.7 a) Méthodes des noeuds



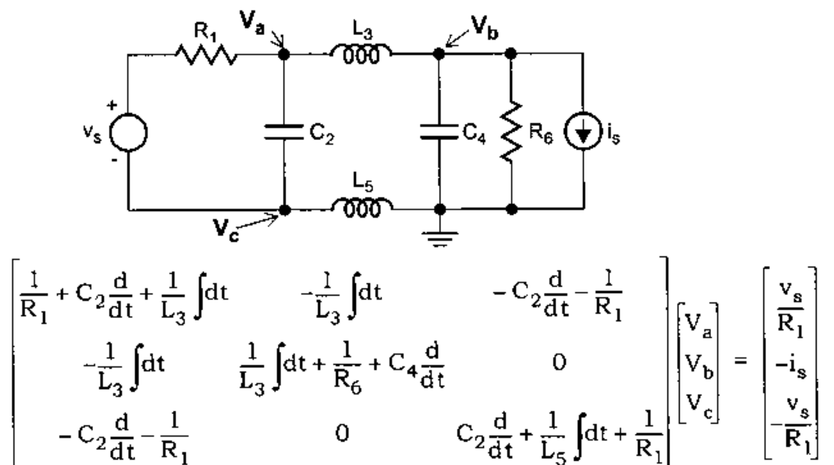
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{L_3}\int dt & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+C_4\frac{d}{dt} & -C_4\frac{d}{dt} \\ -\frac{1}{R_2} & -C_4\frac{d}{dt} & \frac{1}{R_2}+C_4\frac{d}{dt}+\frac{1}{L_1}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1}\int v_s dt + i_s \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles



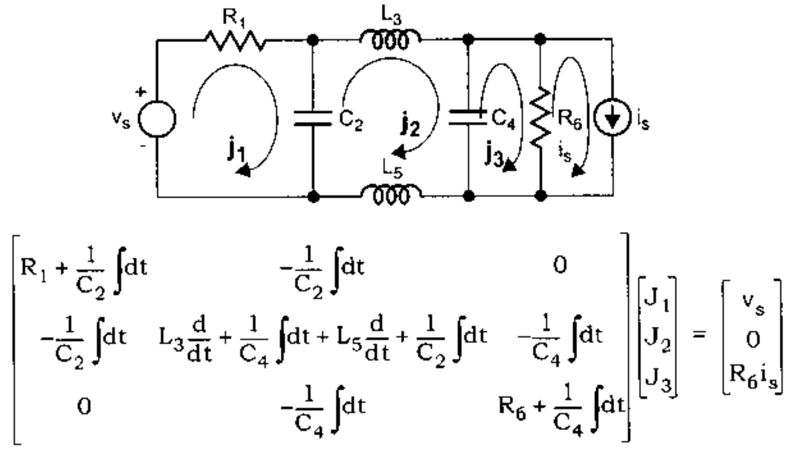
$$\begin{bmatrix} R_2+L_1\frac{d}{dt}+L_3\frac{d}{dt} & -R_2 & -L_3\frac{d}{dt} \\ -R_2 & R_2+R_5+\frac{1}{C_4}\int dt & -R_5 \\ -L_3\frac{d}{dt} & -R_5 & R_5+R_6+L_3\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ -\frac{1}{C_4}\int i_s dt \\ -R_6 i_s \end{bmatrix}$$

3.8 a) Méthode des noeuds



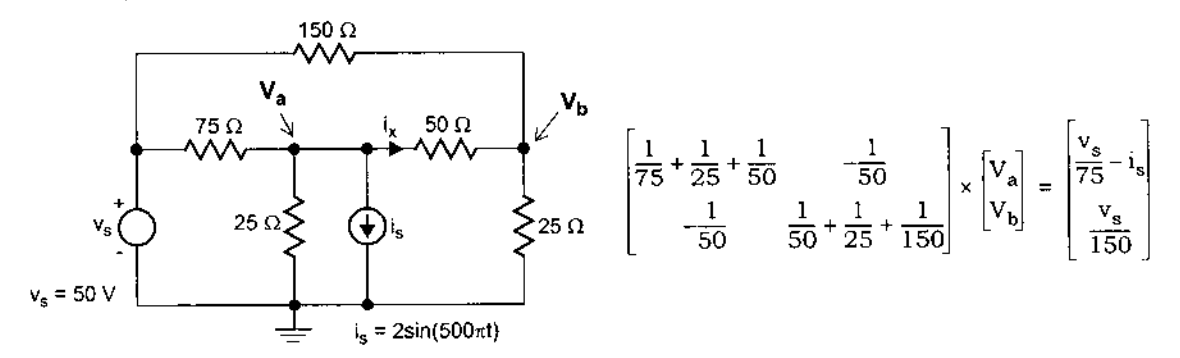
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + C_2\frac{d}{dt} + \frac{1}{L_3}\int dt & -\frac{1}{L_3}\int dt & -C_2\frac{d}{dt} - \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{L_3}\int dt & \frac{1}{L_3}\int dt + \frac{1}{R_6} + C_4\frac{d}{dt} & 0 \\ -C_2\frac{d}{dt} - \frac{1}{R_1} & 0 & C_2\frac{d}{dt} + \frac{1}{L_5}\int dt + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ -i_s \\ -\frac{v_s}{R_1} \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles



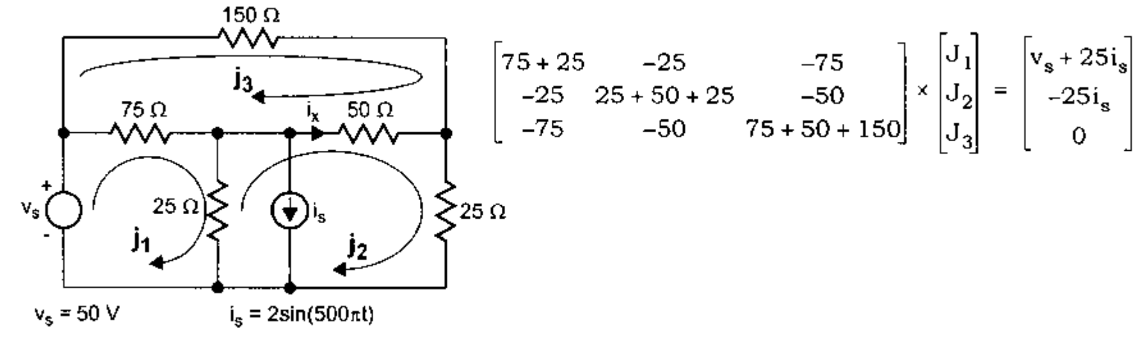
$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C_2}\int dt & -\frac{1}{C_2}\int dt & 0 \\ -\frac{1}{C_2}\int dt & L_3\frac{d}{dt} + \frac{1}{C_4}\int dt + L_5\frac{d}{dt} + \frac{1}{C_2}\int dt & -\frac{1}{C_4}\int dt \\ 0 & -\frac{1}{C_4}\int dt & R_6 + \frac{1}{C_4}\int dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ R_6 i_s \end{bmatrix}$$

3.9 a) Méthode des noeuds



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{75} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} + \frac{1}{25} + \frac{1}{150} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_s}{75} - i_s \\ \frac{v_s}{150} \end{bmatrix}$$

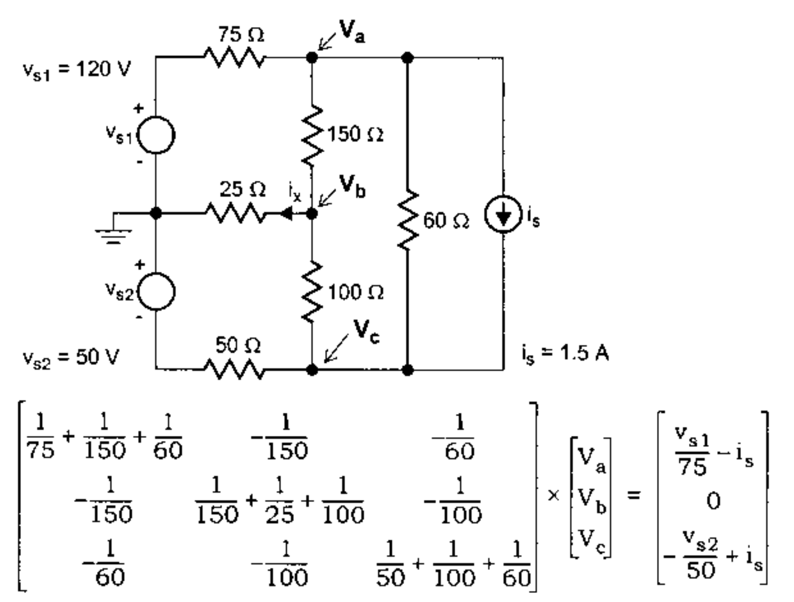
b) Méthode des mailles



$$\begin{bmatrix} 75+25 & -25 & -75 \\ -25 & 25+50+25 & -50 \\ -75 & -50 & 75+50+150 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s + 25i_s \\ -25i_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

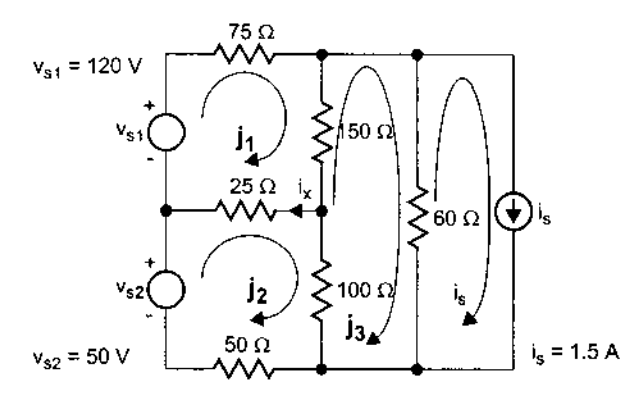
c) $i_x = 0.059 - 0.416\sin(500\pi t)$

3.10 a) Méthode des noeuds



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{75}+\frac{1}{150}+\frac{1}{60} & -\frac{1}{150} & -\frac{1}{60} \\ -\frac{1}{150} & \frac{1}{150}+\frac{1}{25}+\frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \\ -\frac{1}{60} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{50}+\frac{1}{100}+\frac{1}{60} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{s1}}{75} - i_s \\ 0 \\ -\frac{v_{s2}}{50} + i_s \end{bmatrix}$$

b) Méthode des mailles



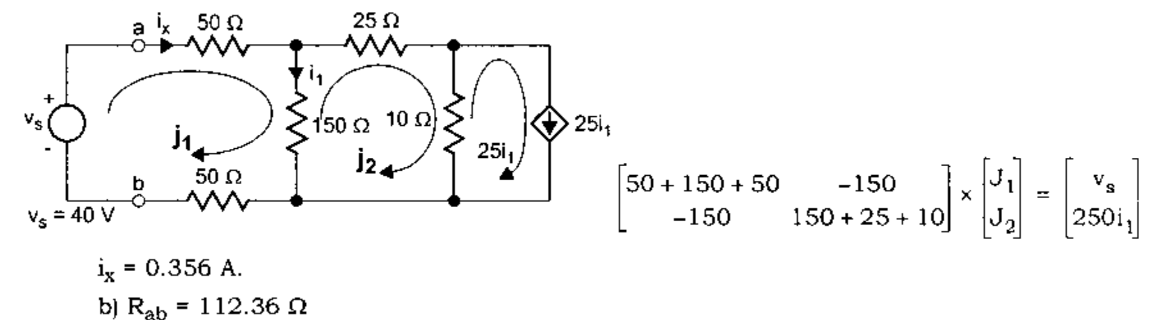
$$\begin{bmatrix} 75+150+25 & -25 & -150 \\ -25 & 25+100+50 & -100 \\ -150 & -100 & 150+60+100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ 60i_s \end{bmatrix}$$

c) $i_x = 0.16$ A.

3.11 a) $R_T = 82.15\ \Omega$ $\quad v_T = 1.286v_s$

b) $v2 = 0.706v_s$

3.12 a) Méthode des mailles

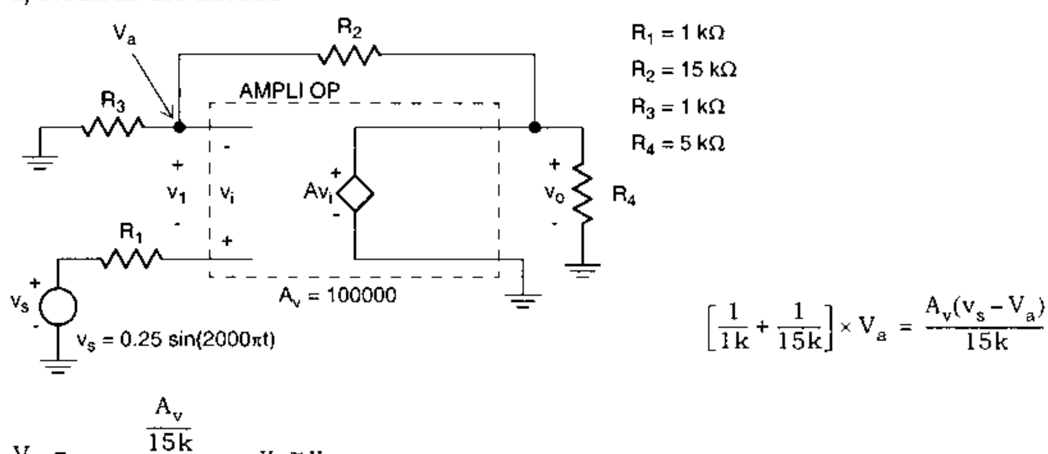


$$\begin{bmatrix} 50+150+50 & -150 \\ -150 & 150+25+10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 250i_1 \end{bmatrix}$$

$i_x = 0.356$ A.

b) $R_{ab} = 112.36\ \Omega$

3.13 a) Méthode des noeuds



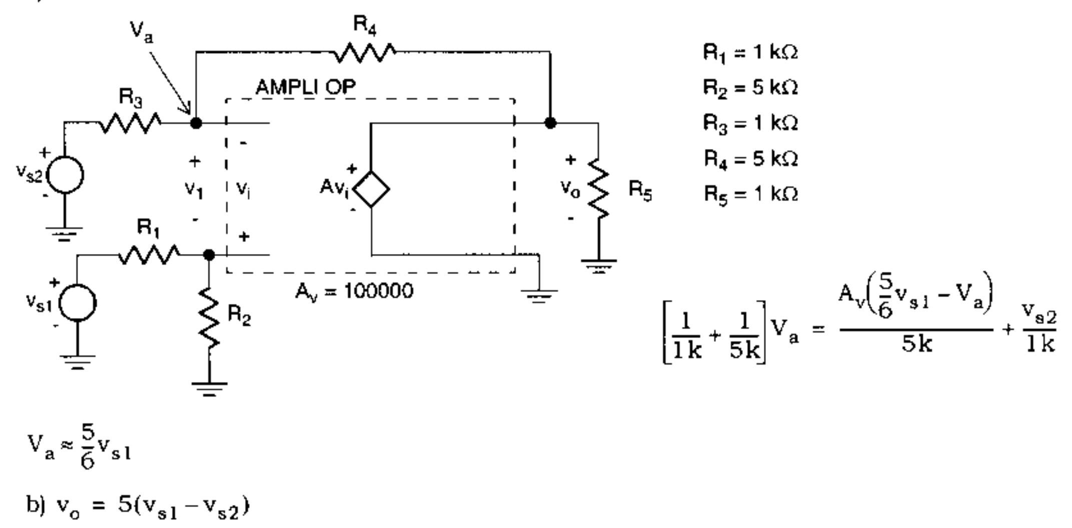
$$\left[\frac{1}{1k} + \frac{1}{15k}\right] \times V_a = \frac{A_v(v_s - V_a)}{15k}$$

$$V_a = \frac{\frac{A_v}{15k}}{\frac{1}{1k} + \frac{1}{15k} + \frac{A_v}{15k}} v_s \approx v_s$$

b) $\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_3 + R_2}{R_3} = \frac{15k + 1k}{1k} = 16$

c) $v_o = 16v_s = 4\sin(2000\pi t)$

3.14 a) Méthode des noeuds



$$\left[\frac{1}{1k}+\frac{1}{5k}\right]V_a = \frac{A_v\left(\frac{5}{6}v_{s1}-V_a\right)}{5k}+\frac{v_{s2}}{1k}$$

$$V_a \approx \frac{5}{6}v_{s1}$$

b) $v_o = 5(v_{s1}-v_{s2})$

Chapitre 4

4.1 $v_1(t) = 12u(t-1\times 10^{-3})-17u(t-3\times 10^{-3})+5u(t-6\times 10^{-3})$

$i_2(t) = 12.5r(t)-12.5r(t-0.2)-12.5r(t-0.5)+12.5r(t-0.7)$

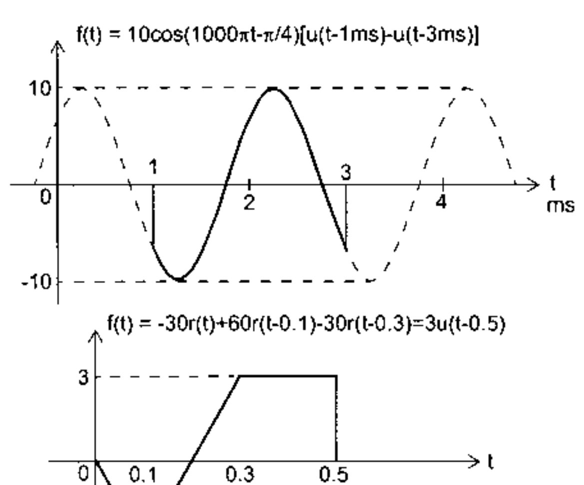
$v_3(t) = 50\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\{u(t-5\times 10^{-3})-u(t-15\times 10^{-3})\}$

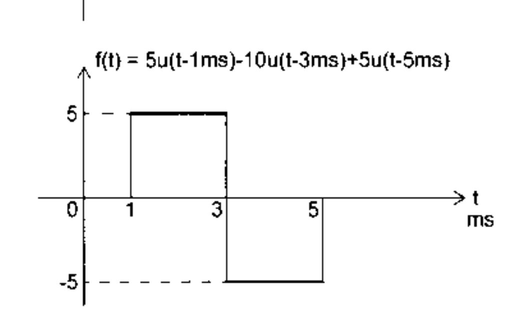
$i_4(t) = 5r(t)-10r(t-10^{-3})+10r(t-3\times 10^{-3})-5r(t-4\times 10^{-3})$

4.2

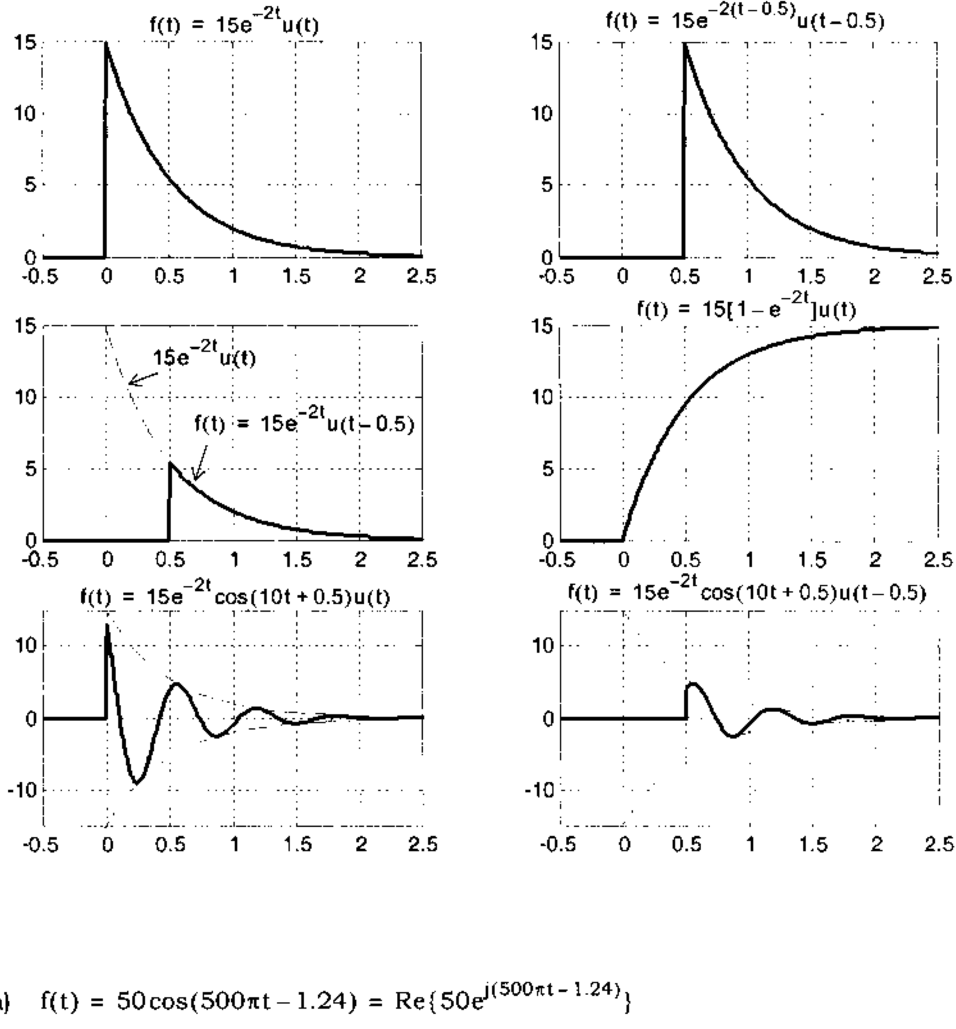
f(t) = (5t-2)[u(t-1)-u(t-3)]

13
3
0
1
3
t





4.3



4.4 a) $f(t) = 50\cos(500\pi t - 1.24) = \mathrm{Re}\{50e^{j(500\pi t - 1.24)}\}$

$$f(t) = 50\cos(500\pi t - 1.24) = 50\sin\left(500\pi t - 1.24 + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Im}\{50e^{j(500\pi t + 0.331)}\}$$

$$f(t) = 50\cos(500\pi t - 1.24) = \frac{50}{2}\{e^{j(500\pi t - 1.24)} + e^{-j(500\pi t - 1.24)}\}$$

b) $f(t) = 50\sin(500\pi t + 0.55) = \mathrm{Im}\{50e^{j(500\pi t + 0.55)}\}$

$$f(t) = 50\sin(500\pi t + 0.55) = 50\cos\left(500\pi t + 0.55 - \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Re}\{50e^{j(500\pi t - 1.021)}\}$$

$$f(t) = 50\sin(500\pi t + 0.55) = \frac{50}{2}\{e^{j(500\pi t - 1.021)} + e^{-j(500\pi t - 1.021)}\}$$

c) $f(t) = 50e^{-15t}\cos(500\pi t + 0.9) = \mathrm{Re}\{50e^{-15t}e^{j(500\pi t + 0.9)}\}$

$$f(t) = 50e^{-15t}\cos(500\pi t + 0.9) = 50e^{-15t}\sin\left(500\pi t + 0.9 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\{50e^{-15t}e^{j(500\pi t + 2.47)}\}$$

$$f(t) = 50e^{-15t}\cos(500\pi t + 0.9) = \frac{50e^{-15t}}{2}\{e^{j(500\pi t + 0.9)} + e^{-j(500\pi t + 0.9)}\}$$

d) $f(t) = 50e^{-15t}\sin(500\pi t - 0.9) = \mathrm{Im}\{50e^{-15t}e^{j(500\pi t - 0.9)}\}$

$$f(t) = 50e^{-15t}\sin(500\pi t - 0.9) = 50e^{-15t}\cos\left(500\pi t - 0.9 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\{50e^{-15t}e^{j(500\pi t - 2.471)}\}$$

$$f(t) = 50e^{-15t}\sin(500\pi t - 0.9) = \frac{50e^{-15t}}{2}\{e^{j(500\pi t - 2.471)} + e^{-j(500\pi t - 2.471)}\}$$

4.5 a) $C_0 = 12$ $\quad C_n = \frac{24}{(n\pi)^2}[1 - \cos(n\pi)]$

b) $C_0 = 0$ $\quad C_n = \frac{12}{n\pi}[1 - e^{-jn\pi}]e^{-jn\frac{\pi}{4}}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

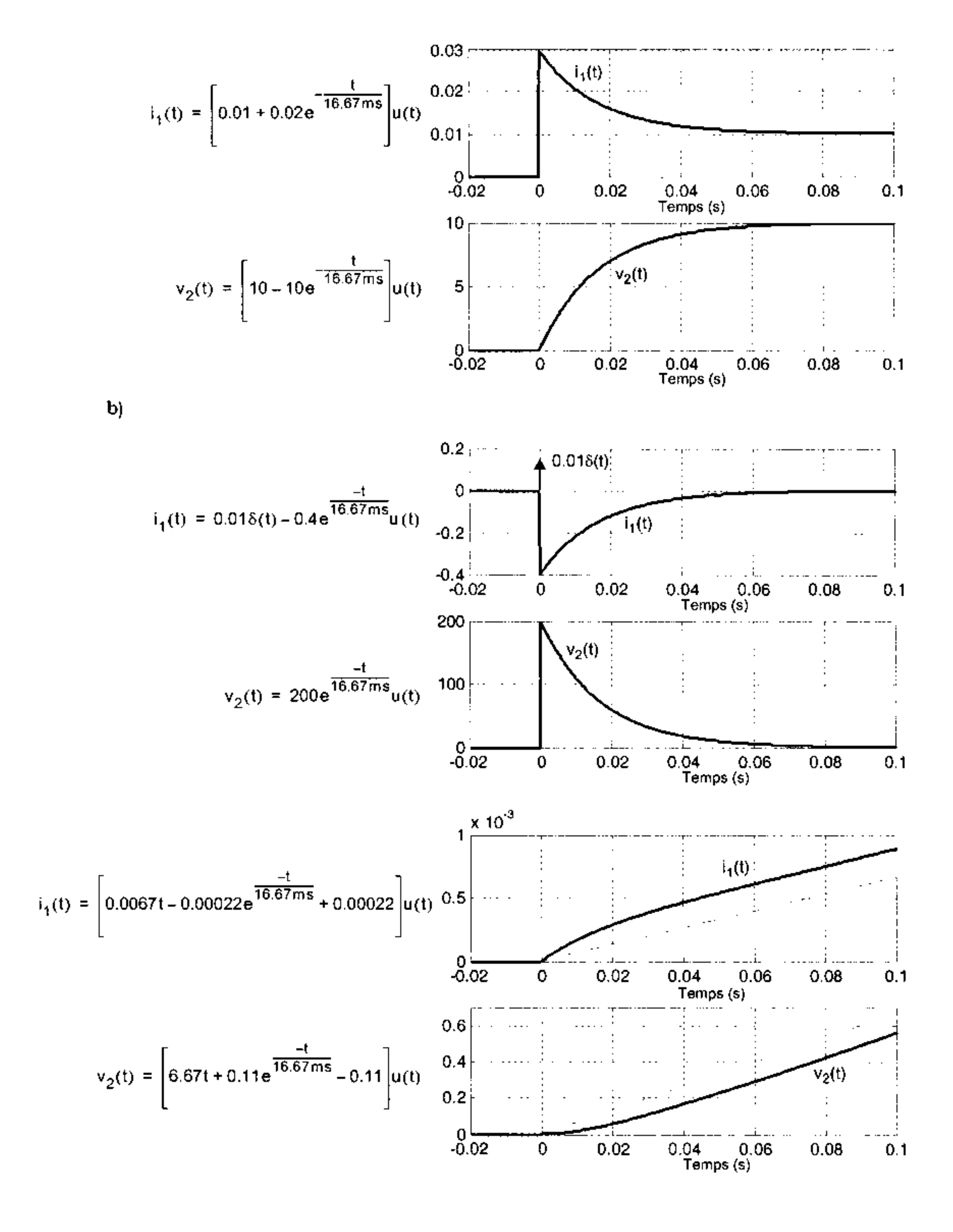
c) $C_0 = 0$ $\quad C_n = \frac{50}{(n\pi)^2}[\cos n\pi - 1] - j\frac{25}{n\pi}[1 - e^{-jn\pi}]$

d) $C_0 = \frac{30}{\pi}$ $\quad C_n = \frac{15}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)}\right]$

Chapitre 5

5.1 a) $i_1(t) = \left[0.01 + 0.02e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$ $\qquad v_2(t) = \left[10 - 10e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$

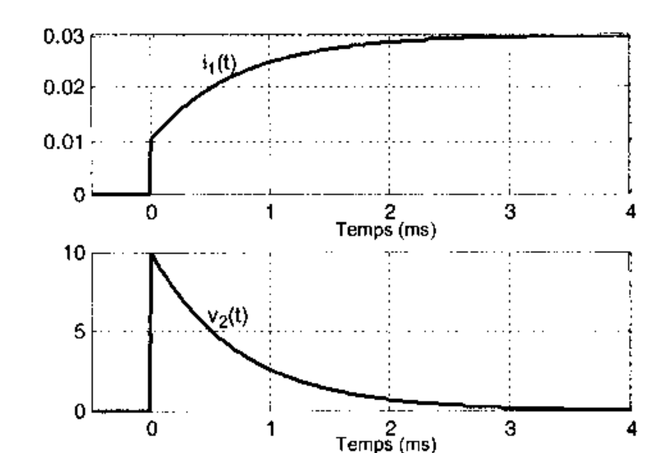
La durée du régime transitoire est $5\tau = 5 \times 16.67$ ms $= 83.33$ ms.


$i_1(t) = \left[0.01 + 0.02e^{-\frac{t}{16.67ms}}\right]u(t)$
i1(t)
Temps (s)
$v_2(t) = \left[10 - 10e^{-\frac{t}{16.67ms}}\right]u(t)$
v2(t)
Temps (s)
b)
$i_1(t) = 0.01\delta(t) - 0.4e^{\frac{-t}{16.67ms}}u(t)$
0.01δ(t)
i1(t)
Temps (s)
$v_2(t) = 200e^{\frac{-t}{16.67ms}}u(t)$
v2(t)
Temps (s)
$i_1(t) = \left[0.0067t - 0.00022e^{\frac{-t}{16.67ms}} + 0.00022\right]u(t)$
x 10-3
i1(t)
Temps (s)
$v_2(t) = \left[6.67t + 0.11e^{\frac{-t}{16.67ms}} - 0.11\right]u(t)$
v2(t)
Temps (s)

5.2 a) La durée du régime transitoire est 5τ = 5 x 0.75 ms = 3.75 ms.

$$i_1(t) = \left[0.03 - 0.02e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$$

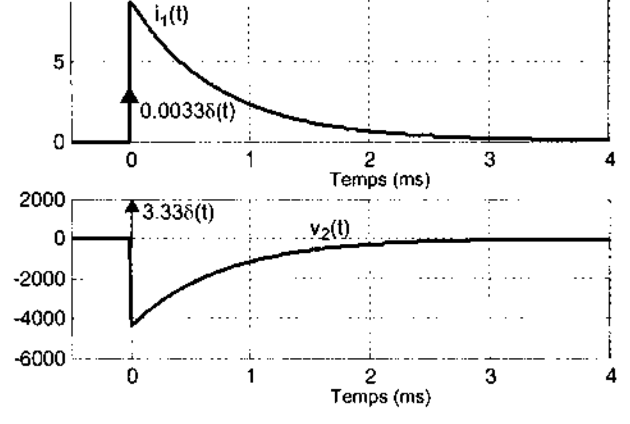
$$v_2(t) = 10e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$



b)

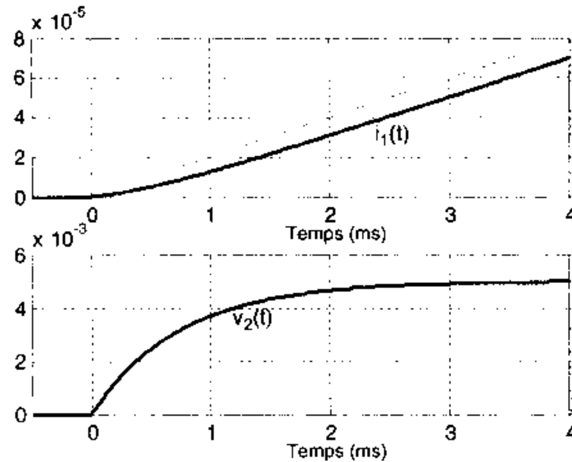
$$i_1(t) = 0.0033\delta(t) + 8.89e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

$$v_2(t) = 3.33\delta(t) - 4444.44e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$

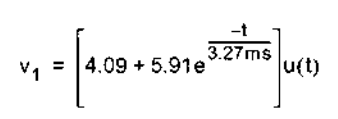


$$i_1(t) = \left[0.02t + 10^{-5}e^{\frac{-t}{\tau}} - 10^{-5}\right]u(t)$$

$$v_2(t) = \left[(5\times10^{-3}) - (5\times10^{-3})e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$



5.3 a)

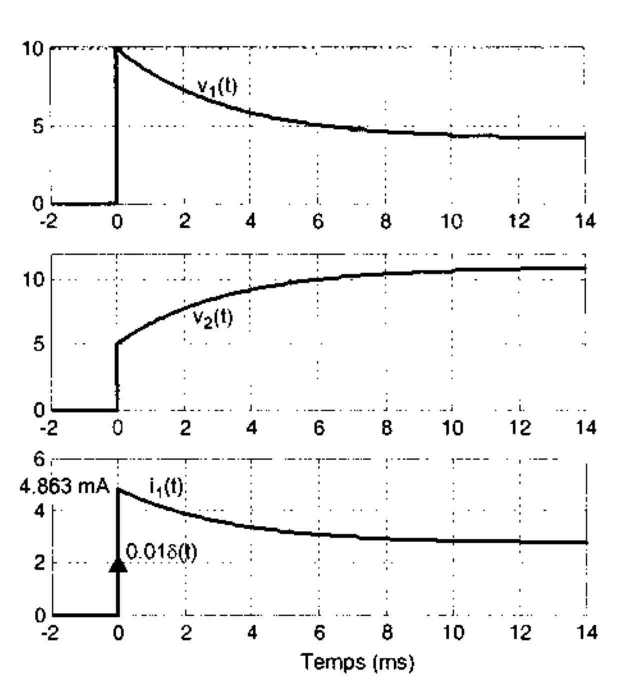


$$v_1 = \left[4.09 + 5.91e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t)$$

$$v_2 = \left[10.91 - 5.91e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t)$$

$$i_1 = \left[2.73 + 2.133e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t) + 0.01\delta(t)$$

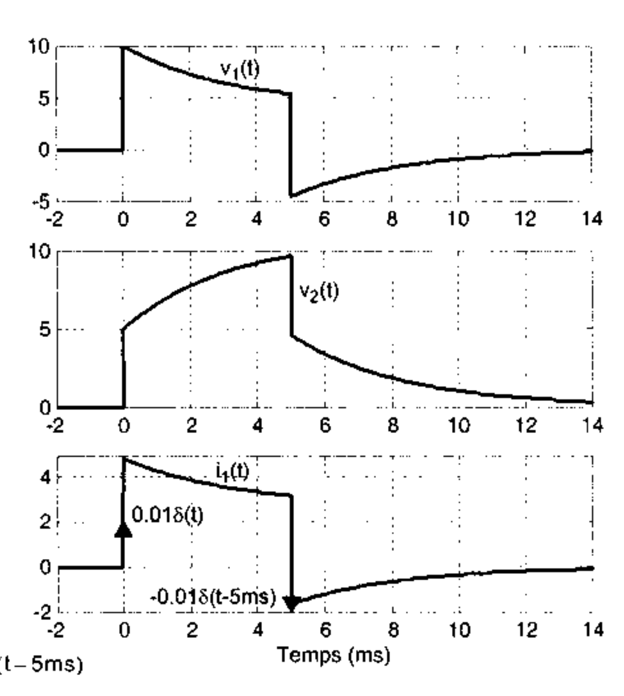
en mA

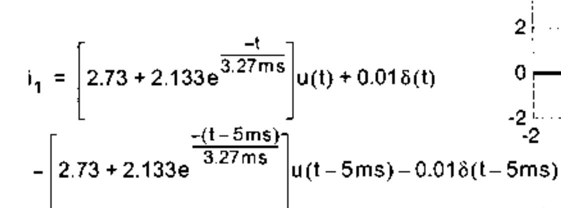


b)

$$v_1 = \left[4.09 + 5.91e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t) - \left[4.09 + 5.91e^{\frac{-(t-5ms)}{3.27ms}}\right]u(t-5ms)$$

$$v_2 = \left[10.91 - 5.91e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t) - \left[10.91 - 5.91e^{\frac{-(t-5ms)}{3.27ms}}\right]u(t-5ms)$$





$$i_1 = \left[2.73 + 2.133e^{\frac{-t}{3.27ms}}\right]u(t) + 0.01\delta(t) - \left[2.73 + 2.133e^{\frac{-(t-5ms)}{3.27ms}}\right]u(t-5ms) - 0.01\delta(t-5ms)$$

en mA

5.4 $i_1 = \left[0.6 - 0.27e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$ $i_2 = \left[0.4 - 0.4e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$ $v_3 = \left[40 - 15e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$

La durée du régime transitoire est 5τ = 5 x 4.8 ms = 24 ms.

Régime permanent: $i_1(\infty) = 0.6A$, $i_2(\infty) = 0.4A$, $v_3(\infty) = 40V$

5.5 $i_1 = \left[0.109 + 0.144e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$ $i_2 = \left[-0.145 + 0.335e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$

$v_3 = \left[45.45 - 45.45e^{-\frac{t}{\tau}}\right]u(t)$

La durée du régime transitoire est 5τ = 5 x 11.5 ms = 57.5 ms.

Régime permanent: $i_1(\infty) = 0.109A$, $i_2(\infty) = -0.145A$, $v_3(\infty) = 45.45V$

5.6 $i_1 = [1.585\cos(200\pi t + 0.514) + 0.62e^{-500t}]u(t)$

$v_2 = [49.8\cos(200\pi t - 0.899) - 30.995e^{-500t}]u(t)$

La durée du régime transitoire est 5τ = 5/500 = 10 ms.

Régime permanent: $i_1 = 1.585\cos(200\pi t + 0.514)$, $v_2 = 49.8\cos(200\pi t - 0.899)$

5.7 $i_1 = [0.753\cos(200\pi t - 0.185) - 0.0732e^{-333.33t}]u(t)$

$v_2 = [29.47\cos(200\pi t + 0.488) + 7.32e^{-333.33t}]u(t)$

La durée du régime transitoire est 5τ = 5/333.33 = 15 ms.

Régime permanent: $i_1 = 0.753\cos(200\pi t - 0.185)$, $v_2 = 29.47\cos(200\pi t + 0.488)$

5.8 $i_1 = \{1.761e^{-796.53t} + 1.239e^{-78.46t}\}u(t)$

$v_2 = \{-83.6e^{-796.53t} + 83.6e^{-78.46t}\}u(t)$

La durée du régime transitoire est $\dfrac{5}{\min(|s_1|, |s_2|)} = \dfrac{5}{78.46} = 63.7\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0$, $v_2 = 0$

5.9 $i_1 = 2.582e^{-125t}\cos(290.47t - 1.571)u(t)$

$v_2 = 163.3e^{-125t}\cos(290.47t + 0.406)u(t)$

La durée du régime transitoire est 5τ = 5/125 = 40 ms.

Régime permanent: $i_1 = 0$, $v_2 = 0$

5.10 a) $i_1 = \{1.456e^{-175t}\cos(307.2t - 1.849) + 0.4\}u(t)$

$v_2 = \{80e^{-175t}\cos(307.2t + 3.07) + 80\}u(t)$

b) La durée du régime transitoire est $\frac{5}{|\alpha|} = \frac{5}{175} = 28\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0.4\text{A}$, $v_2 = 80\text{V}$

c) $i_1 = \{0.326e^{-175t}\cos(307.2t - 1.27) + 0.327\cos(500\pi t - 1.4)\}u(t)$

$v_2 = [4.8e^{-175t}\cos(307.2t + 0.556) + 4.0\cos(500\pi t - 2.911)]u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.327\cos(500\pi t - 1.4)$, $v_2 = 4.0\cos(500\pi t - 2.911)$

5.11 a) $i_1 = [0.2 + 1.483e^{-133t}\cos(332.4t - 1.638)]u(t)$

$v_2 = [72.31e^{-133t}\cos(332.4t - 1.5708)]u(t)$

b) La durée du régime transitoire est $5\tau = 5/133 = 37.6$ ms.

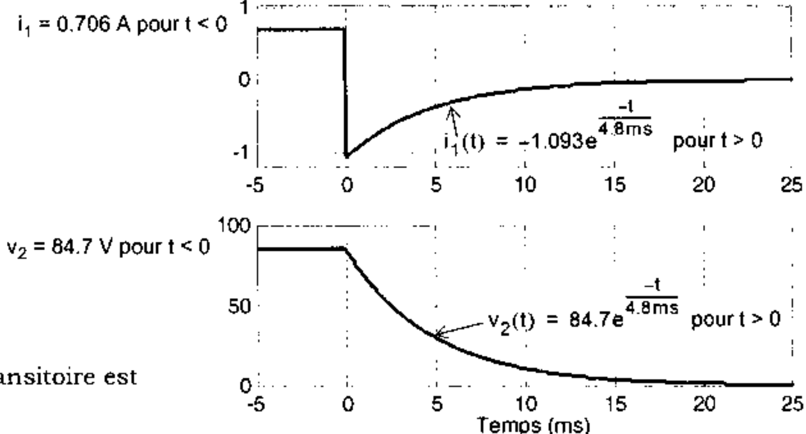
Régime permanent: $i_1 = 0.2$, $v_2 = 0$

c) $i_1 = [0.255e^{-133t}\cos(332.4t + 2.316) + 0.853\cos(400\pi t - 1.364)]u(t)$

$v_2 = [6.226e^{-133t}\cos(332.4t + 2.391) + 20.288\cos(400\pi t - 1.344)]u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.853\cos(400\pi t - 1.364)$, $v_2 = 20.288\cos(400\pi t - 1.344)$

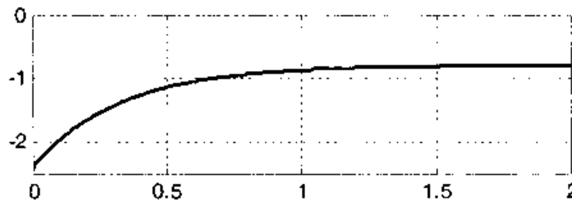
5.12



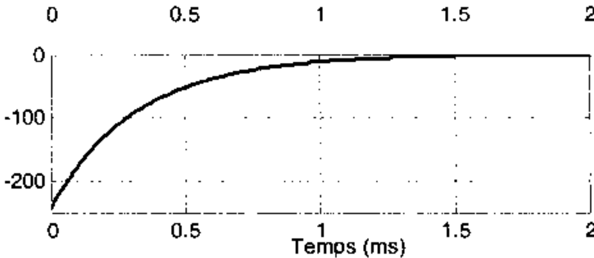
La durée du régime transitoire est $5\tau = 24$ ms.

5.13

$$i_1(t) = -\left[1.6e^{\frac{-t}{0.33ms}} + 0.8\right]u(t)$$



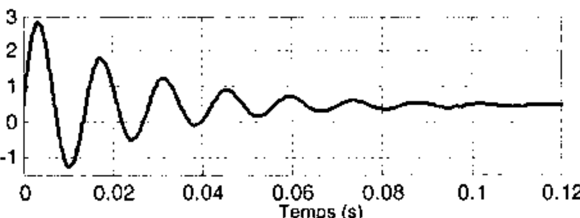
$$v_2(t) = -240e^{\frac{-t}{0.33ms}}u(t)$$



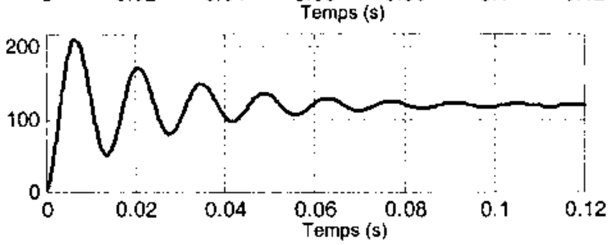
La durée du régime transitoire est
$5\tau = 1.65$ ms.

5.14

$$i_1 = [0.48 - 2.69e^{-40t}\cos(445.4t + 1.5728)]u(t)$$



$$v_2 = \left\{120.48e^{-40t}\cos(445.4t - 3.05) + 120\right\}u(t)$$



La durée du régime transitoire est
$5\tau = \frac{5}{40} = 0.125$ s.

5.15 Pour $t > 0$: $i_1 = \left[3 - e^{-\frac{t}{15ms}}\right]$ $v_2 = \left[100 - 33.33e^{-\frac{t}{15ms}}\right]$

La durée du régime transitoire est $5\tau = 75$ ms.

Chapitre 6

6.1 a) $F(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s+\alpha}$ b) $F(s) = \frac{A}{s} - e^{-Ts} \times \frac{A}{s} = \frac{A}{s}[1 - e^{-Ts}]$

c) $F(s) = A\left\{\frac{1}{s+\alpha} - \frac{e^{-T(s+\alpha)}}{s+\alpha}\right\}$ d) $F(s) = \frac{2}{(s+5)^3}$

e) $F(s) = \frac{e^{-2(s+0.5)}}{s+0.5}$ f) $F(s) = \frac{6e^{-j0.785}}{(s+1.5-j500)} + \frac{6e^{j0.785}}{(s+1.5+j500)}$

6.2 a) $f(t) = \{0.267e^{-t} + 0.352e^{-t}\cos(1.732t + 2.428)\}u(t)$

b) $f(t) = \{0.667e^{-t} + 0.832e^{-t}\cos(t + 2.215)\}u(t)$

c) $f(t) = \{10te^{-t} - 5e^{-t} + 5e^{2t}\}u(t)$

d) $f(t) = \{8e^{-t} - 8e^{-t}\cos t\}u(t)$

e) $f(t) = \{0.4e^{-t} + 0.564e^{-t}\cos(2t - 2.356)\}u(t)$

f) $f(t) = \{0.036e^{-2t} - 0.143e^{-t} + 0.107\}u(t)$

6.3 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{2s + 300}{5\times10^{-5}s^2 + 0.015s + 1}$ $\qquad H_1(s) = \dfrac{s + 200}{2s + 300}$

b) $i_1(t) = 2.5\times10^{-3}\delta(t) + (0.333 + 0.0417e^{-150t})u(t)$

$v_2(t) = (66.667 - 16.667e^{-150t})u(t)$

La durée du régime transitoire est 5/150 = 33.3 ms.

Régime permanent: $i_1 = 0.333$, $v_2 = 66.667$

c) $i_1(t) = 2.5\times10^{-3}\delta(t) + \{1.026\cos(120\pi t + 1.202) + 0.0057e^{-150t}\}u(t)$

$v_2(t) = \{52.591\cos(120\pi t - 0.109) - 2.278e^{-150t}\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 1.026\cos(120\pi t + 1.202)$, $v_2 = 52.591\cos(120\pi t - 0.109)$

6.4 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{50(s^2 + 1400s + 320000)}{s^2 + 1000s + 80000}$ $\qquad H_1(s) = \dfrac{160000}{s^2 + 1400s + 320000}$

b) Fréquences naturelles: $s_1 = -287.7$, $s_2 = -1112.3$

La durée du régime transitoire est $5\max(\frac{1}{287.7}, \frac{1}{1112.3}) = 17.4\text{ms}$.

c) $i_1(t) = \{0.5 + 1.053e^{-287.7t} + 0.447e^{-1112.3t}\}u(t)$

$v_2(t) = \{50 + 17.44e^{-1112.3t} - 67.44e^{-287.7t}\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.5$, $v_2 = 50$

c) $i_1(t) = \{1.808\cos(1256.6t + 0.252) + 0.052e^{-287.7t} + 0.447e^{-1112.3t}\}u(t)$

$v_2(t) = \{7.396\cos(1256.6t - 2.192) + 7.663e^{-1112.3t} - 3.359e^{-287.7t}\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 1.808\cos(1256.6t + 0.252)$, $v_2 = 7.396\cos(1256.6t - 2.192)$

6.5 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{120.48(s + 520.833)}{s + 627.5}$ $\qquad H_1(s) = \dfrac{0.25(s + 833.333)}{s + 520.833}$

b) $i_1(t) = (1 - 0.17e^{-520.833t})u(t)$

$v_2(t) = (40 - 15e^{-520.833t})u(t)$

La durée du régime transitoire est 5/520.833 = 9.6 ms.

Régime permanent: $i_1 = 1$, $v_2 = 40$

c) $i_1(t) = \{0.945\cos(120\pi t - 0.085) - 0.111e^{-520.833t}\}u(t)$

$v_2(t) = \{35.564\cos(120\pi t - 0.202) - 9.843e^{-520.833t}\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.945\cos(120\pi t - 0.085)$, $v_2 = 35.564\cos(120\pi t - 0.202)$

6.6 a) $i_1(t) = \{0.518e^{-62.2t} - 0.018e^{-2412.8t}\}u(t)$

$i_2(t) = \{2 - 2.074e^{-62.2t} + 0.074e^{-2412.8t}\}u(t)$

$v_3(t) = \{100 - 77.8e^{-62.2t} + 2.8e^{-2412.8t}\}u(t)$

b) La durée du régime transitoire est $5 \times \max\{\frac{1}{62.2}, \frac{1}{2412}\} = 80\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0$, $i_2 = 2$, $v_3 = 100$

c) $i_1(t) = \{0.0008e^{-62.2t} - 0.013e^{-2412.8t} + 0.512\cos(1570.8t + 0.02)\}u(t)$

$v_3(t) = \{23.24\cos(1570.8t - 0.08) - 0.12e^{-62.2t} + 1.95e^{-2412.8t}\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.512\cos(1570.8t + 0.02)$, $v_3 = 23.24\cos(1570.8t - 0.08)$

6.7 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{s^2 + 350s + 125000}{5(s + 100)}$ $\quad H_1(s) = \dfrac{100000}{s^2 + 350s + 125000}$

b) Fréquences naturelles: s_1 = -175+j307.2, s_2 = -175-j307.2

La durée du régime transitoire est $\frac{5}{175} = 28.6\text{ms}$.

c) $i_1(t) = \{0.4 + 1.456e^{-175t}\cos(307.2t - 1.85)\}u(t)$

$v_2(t) = \{80 + 92.06e^{-175t}\cos(307.2t + 2.62)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.4$, $v_2 = 80$

c) $i_1(t) = \{0.076e^{-175t}\cos(307.2t + 2.37) + 0.326\cos(1570.8t - 1.4)\}u(t)$

$v_2(t) = \{4.76e^{-175t}\cos(307.2t + 0.56) + 4.056\cos(1570.8t - 2.91)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.326\cos(1570.8t - 1.4)$, $v_2 = 4.056\cos(1570.8t - 2.91)$

6.8 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{0.1(s^2 + 263.49s + 1.2697\times10^5)}{(s + 25.4)}$ $\quad H_1(s) = \dfrac{238.095s}{s^2 + 263.49s + 1.2697\times10^5}$

b) Fréquences naturelles: s_1 = -131.75+j331.1, s_2 = -131.75-j331.1

La durée du régime transitoire est $5 \times \frac{1}{131.75} = 38\text{ms}$.

c) $i_1(t) = \{0.2 + 2.948e^{-131.75t}\cos(331.1t - 1.64)\}u(t)$

$v_2(t) = \{71.92e^{-131.75t}\cos(331.1t + 1.57)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.2$, $v_2 = 0$

c) $i_1(t) = \{0.252e^{-131.75t}\cos(331.1t + 2.32) + 0.844\cos(1256.6t - 1.37)\}u(t)$

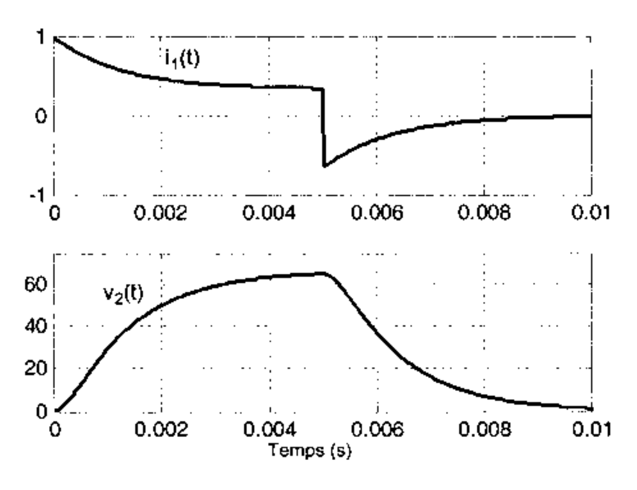
$v_2(t) = \{7.12e^{-131.75t}\cos(331.1t + 2.39) + 20.1\cos(1256.6t - 1.35)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.844\cos(1256.6t - 1.37)$, $v_2 = 20.1\cos(1256.6t - 1.35)$

6.9 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{25(s^2 + 4500s + 3\times10^6)}{s^2 + 4000s + 1\times10^6}$ $\qquad H_1(s) = \dfrac{2\times10^6}{s^2 + 4500s + 3\times10^6}$

b) $i_1(t) = \{0.333 - 0.015e^{-3686.1t} + 0.6815e^{-813.9t}\}u(t)$
$- \{0.333 - 0.015e^{-3686.1(t-5ms)} + 0.6815e^{-813.9(t-5ms)}\}u(t-5ms)$

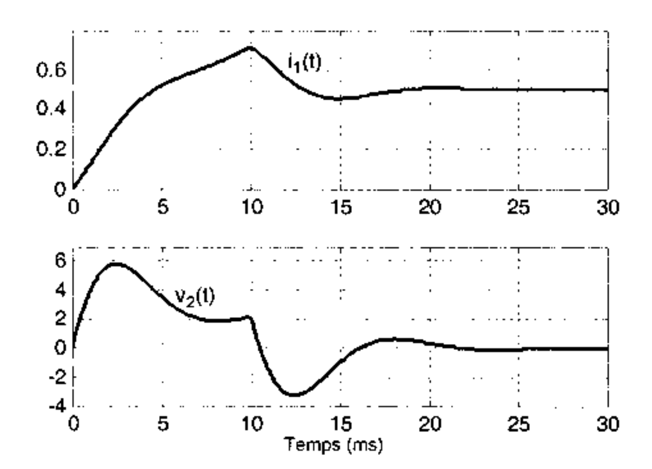
$v_2(t) = \{66.67 + 18.89e^{-3686.1t} - 85.56e^{-813.9t}\}u(t)$
$- \{66.67 + 18.89e^{-3686.1(t-5ms)} - 85.56e^{-813.9(t-5ms)}\}u(t-5ms)$



6.10 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{50(s^2 + 600s + 4\times10^5)}{s^2 + 1200s + 2\times10^5}$ $\qquad H_1(s) = \dfrac{s(s+200)}{s^2 + 600s + 4\times10^5}$

b) $i_1(t) = \{0.225 + 50t + 0.227e^{-300t}\cos(556.8t + 3.0)\}u(t)$
$- \{0.225 + 50(t - 10ms) + 0.227e^{-300(t-10ms)}\cos(556.8(t - 10ms) + 3.0)\}u(t - 10ms)$

$v_2(t) = \{2.5 + 8.032e^{-300t}\cos(556.8t - 1.887)\}u(t)$
$- \{2.5 + 8.032e^{-300(t-10ms)}\cos(556.8(t - 10ms) - 1.887)\}u(t - 10ms)$



6.11 a) $Z_{eq}(s) = 5000$ $\quad H_1(s) = \dfrac{4000}{s + 1666.67}$

b) $i_1(t) = 0.001u(t)$

$v_2(t) = \{12 - 12e^{-1666.67t}\}u(t)$

La durée du régime transitoire est $\dfrac{5}{1666.67} = 3\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0.001$, $v_2 = 12$

c) $i_1(t) = 0.001\sin(1000\pi t)u(t)$

$v_2(t) = \{4.968e^{-1666.67t} + 5.624\cos(1000\pi t - 2.654)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.001\sin(1000\pi t)$, $v_2 = 5.624\cos(1000\pi t - 2.654)$

6.12 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{50(s + 602)}{s + 202}$ $\quad H_1(s) = \dfrac{1920}{s + 602}$

b) $i_1(t) = (0.1342 + 0.2658e^{-602t})u(t)$ $\quad v_2(t) = \{63.787 - 63.787e^{-602t}\}u(t)$

La durée du régime transitoire est $\dfrac{5}{602} = 8.3\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0.1342$, $v_2 = 63.787$

6.13 a) $Z_{eq}(s) = \dfrac{s^2 + 500s + 1\times10^6}{s^2 + 300s + 1\times10^6} \times 10000$ $\quad H_1(s) = \dfrac{-1\times10^6}{s^2 + 500s + 1\times10^6}$

b) $i_1(t) = [0.001 + 2.066\times10^{-4}e^{-250t}\cos(968.25t + 1.5708)]u(t)$

$v_2(t) = \{-10 + 10.328e^{-250t}\cos(968.25t + 2.889)\}u(t)$

La durée du régime transitoire est $\frac{5}{250} = 20\text{ms}$.

Régime permanent: $i_1 = 0.001$, $v_2 = 10$

c) $i_1(t) = 3.44\times10^{-5}e^{-250t}\cos(968.25t - 1.012) + 0.0015\cos(1000\pi t - 0.07)$

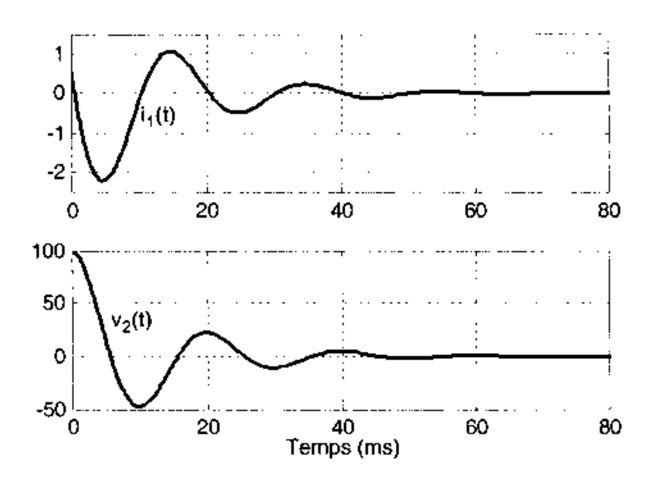
$v_2(t) = \{-1.72e^{-250t}\cos(968.25t + 0.306) - 1.665\cos(1000\pi t + 0.175)\}u(t)$

Régime permanent: $i_1 = 0.0015\cos(1000\pi t - 0.07)$, $v_2 = -1.665\cos(1000\pi t + 0.175)$

6.14 a) $i_1(t) = [3.2505e^{-75t}\cos(315.24t + 1.416)]u(t)$

$v_2(t) = [102.791e^{-75t}\cos(315.24t - 0.234)]u(t)$

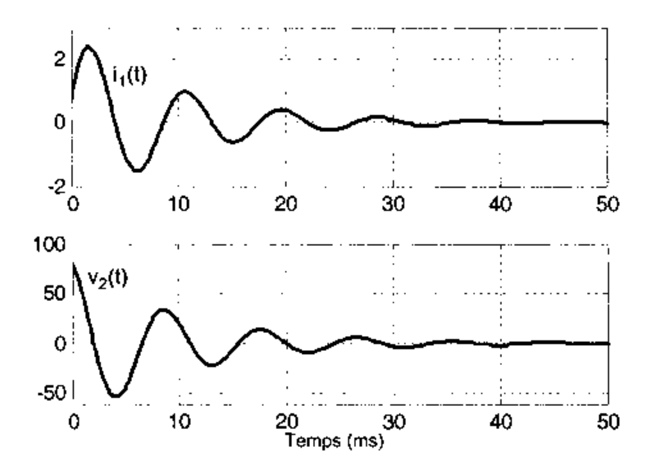
b)La durée du régime transitoire est $\frac{5}{75} = 66.7\text{ms}$.



6.15 a) $i_1(t) = [2.857e^{-100t}\cos(700t - 1.287)]u(t)$

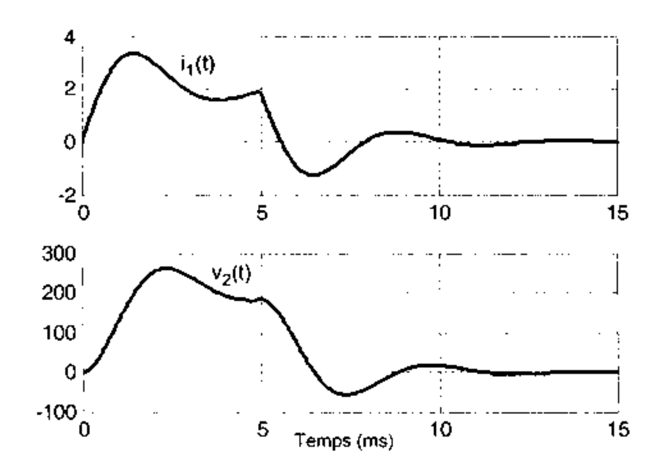
$v_2(t) = [80.812e^{-100t}\cos(700t + 0.142)]u(t)$

b)La durée du régime transitoire est $\frac{5}{100} = 50\text{ms}$.



6.16 $i_1(t) = \{2 + 3.024e^{-500t}\cos(1322.9t - 2.294)\}u(t)$
$- \{2 + 3.024e^{-500(t-5ms)}\cos(1322.9(t-5ms) - 2.294)\}u(t-5ms)$

$v_2(t) = \{200 + 213.81e^{-500t}\cos(1322.9t + 2.78)\}u(t)$
$- \{200 + 213.81e^{-500(t-5ms)}\cos(1322.9(t-5ms) + 2.78)\}u(t-5ms)$



Chapitre 7

7.1 $I_1 = 2.003\angle{-0.650}$ A $\quad I_2 = 1.037\angle{-0.935}$ A $\quad I_3 = 1.049\angle{-0.368}$ A

$V_1 = 125.83\angle 0.920$ V $\quad V_2 = 124.4\angle{-0.935}$ V $\quad V_3 = 66.8\angle{-1.939}$ V

$V_4 = 104.94\angle{-0.368}$ V

7.2 $V_2 = 123.4\angle{-1.498}\ \text{V}$ $V_3 = 115.5\angle{-0.65}\ \text{V}$

$I_1 = 3.62\angle{-0.998}\ \text{V}$ $I_4 = 3.09\angle{-1.001}\ \text{V}$

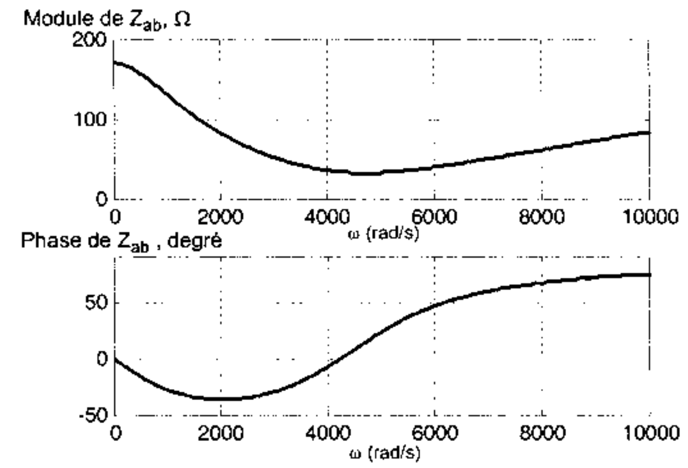
7.3 a) $Z_{eq} = 917.31\angle{-0.861}\ \Omega$

b) $I_1 = 0.327\angle 0.861\ \text{A}$ $V_1 = 128.60\angle 0.196\ \text{V}$ $V_2 = 175.63\angle{-0.143}\ \text{V}$

7.4 a) $I_1 = 0.56\angle{-1.257}\ \text{A}$ $I_2 = 0.434\angle{-1.787}\ \text{A}$ $V_3 = 30.9\angle{-0.54}\ \text{V}$

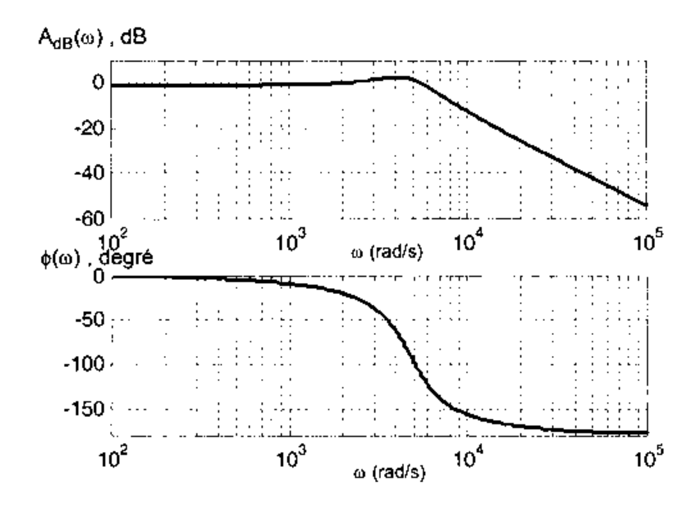
b) $I_s = 0.903\angle{-0.492}\ \text{A}$ $Z_{eq} = 132.89\angle 0.492\ \Omega$

7.5 a) $Z_{ab}(j\omega) = \dfrac{(6.8\times10^5 - 0.03\omega^2) + j100\omega}{4000 + j3\omega}$



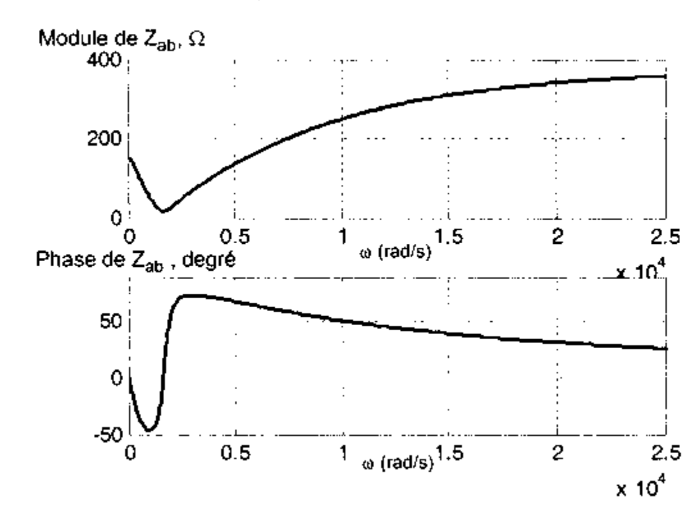
Z_{ab} est purement résistive à $\omega = 4269$ rad/s.

b) $H_1(s) = \dfrac{6\times10^5}{0.03s^2 + 100s + 6.8\times10^5}$

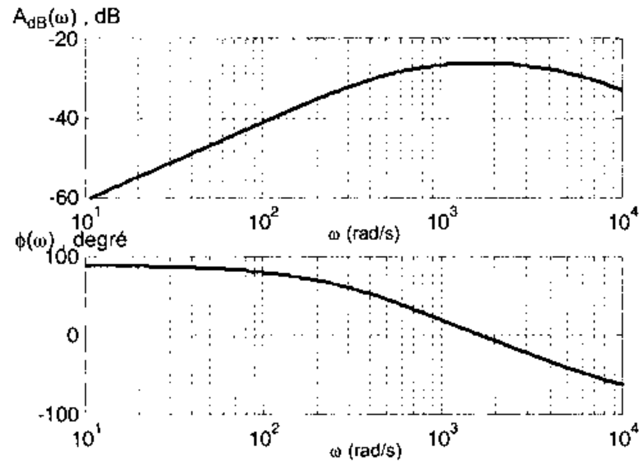


c) $I_1 = 0.494\angle 0.613\ \text{A}$ $V_2 = 47.92\angle -0.254\ \text{V}$

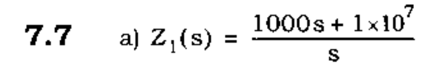
7.6 a) $Z_{ab}(s) = \dfrac{8s^2 + 4110s + 2.25\times 10^7}{0.02s^2 + 254s + 150000}$



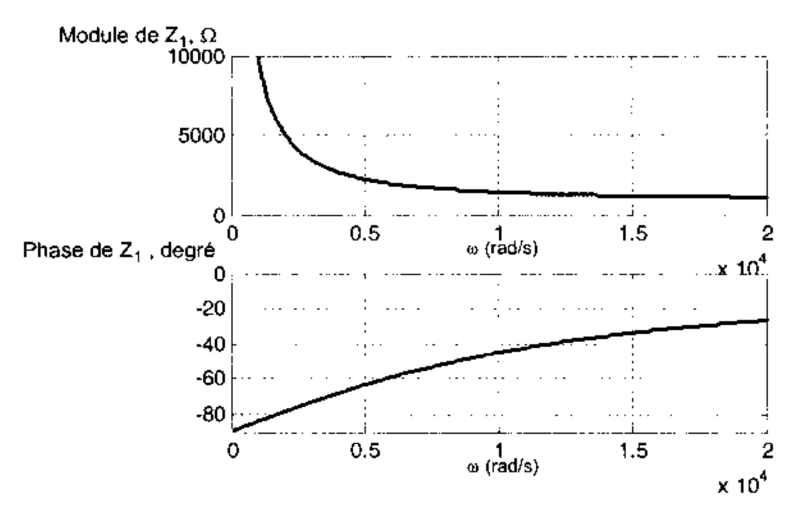
b) $H_1(s) = \dfrac{2000s}{8s^2 + 41100s + 2.25\times 10^7}$



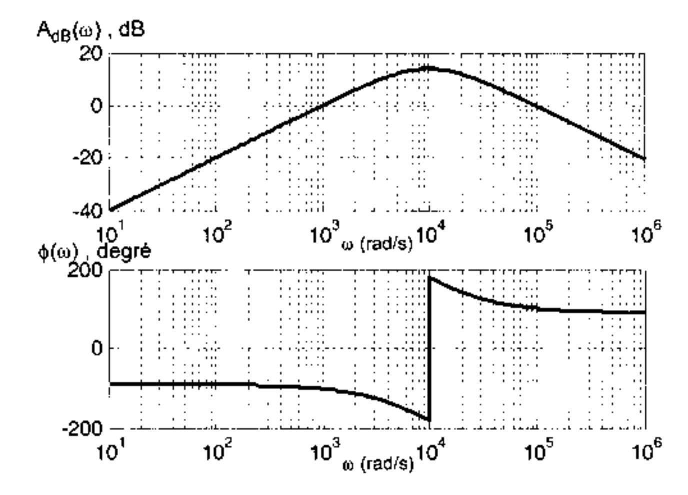
c) $I_1 = 0.820\angle 0.504\ \text{A}$ $V_2 = 2.857\angle 0.943\ \text{V}$



7.7 a) $Z_1(s) = \dfrac{1000s + 1\times10^7}{s}$

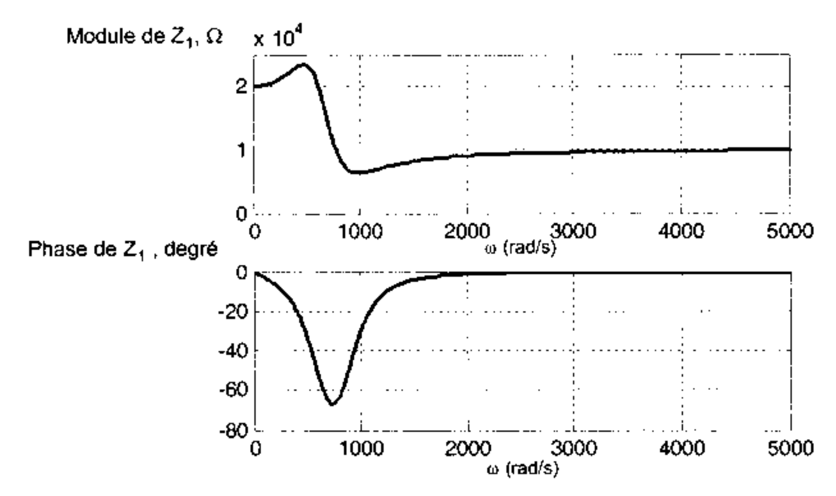


b) $H_1(s) = \dfrac{-10^5 s}{(s + 10^4)^2}$

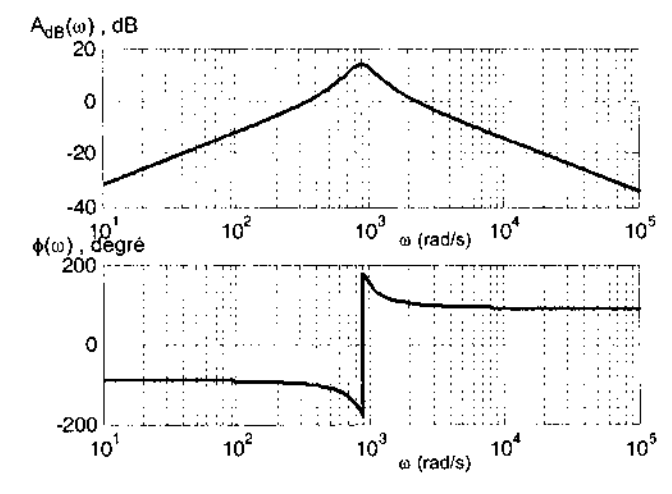


c) $I_1 = 0.953\angle 0.308\ \text{mA} \qquad V_2 = 2.89\angle 2.187\ \text{V}$

7.8 a) $Z_1(s) = \dfrac{s^2 + 400s + 800000}{s^2 + 400s + 400000} \times 10000$



b) $H_1(s) = \dfrac{-2000s}{s^2 + 400s + 800000}$



c) $I_1 = 0.535\angle 0.012\,\text{mA}$ $V_2 = 4.48\angle 1.751\,\text{V}$

7.9 a) $Z_{eq} = (33.4\angle 0.119)\Omega$

b) $I_1 = 11.98\angle -0.119\,\text{A}$

c) S = 2395.3 VA P = 2378.3 W Q = 284.2 VAR $\cos\phi = 0.993$

7.10 a) $Z_{eq} = (49.65\angle 1.043)\Omega$

b) $I_1 = 8.06\angle -1.043\,\text{A}$

c) S = 1611.3 VA P = 811.3 W Q = 1392.2 VAR $\cos\phi = 0.504$

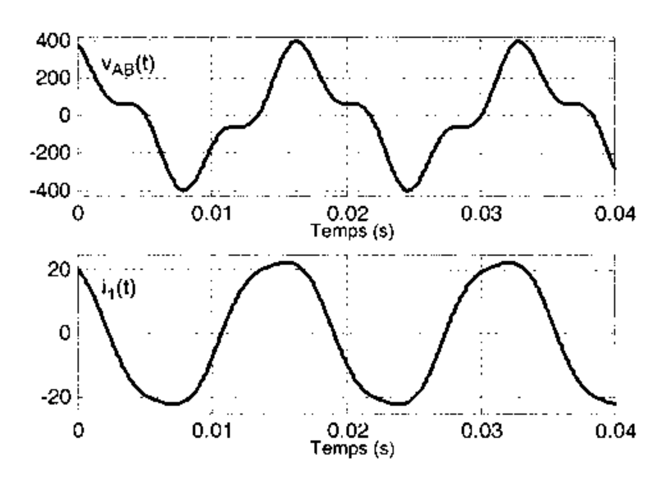
7.11 a) $I_{1eff} = 4.97\angle{-2.13}$ A

b) $P_R = 494.2$ W $Q_L = 931.5$ VAR

c) $P_{s1} = -559.6$ W $Q_{s1} = 893.7$ VAR

7.12 a) $V_{AB}(\text{eff}) = 223.6$ V

b) $I_1(\text{eff}) = 16.89$ A



c) P = 2852.6 W Q = -2073.2 VAR

7.13 a) $Z = (33.33\angle{-0.785})\Omega$

P = 2651.7 W Q = -2651.7 VAR

b) Nouvelle valeur de i_s: $I_{seff} = 8.39\angle{-0.464}$ A

7.14 a) $V_1(\text{moy}) = 70$ V $V_1(\text{eff}) = 78.42$ V

b) $V_2(\text{moy}) = 101.86$ V $V_2(\text{eff}) = 113.14$ V

c) $V_3(\text{moy}) = 86.94$ V $V_3(\text{eff}) = 107.88$ V

d) $I_4(\text{moy}) = 7$ A $I_4(\text{eff}) = 7.21$ A

e) $I_5(\text{moy}) = 0$ A $I_5(\text{eff}) = 9.8$ A

Index

Q

R

S

T

V